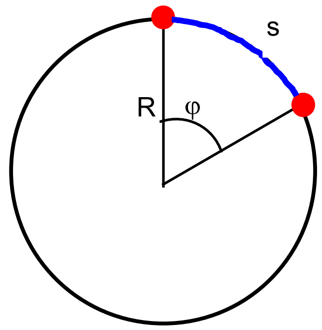
Dpto. Física y Química	**MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME**	**I.E.S La Magdalena.** Avilés. Asturias

> La trayectoria es una circunferencia.
> La velocidad es constante



Si se considera un punto girando en una circunferencia es fácil concluir que es mucho más sencillo medir el ángulo girado en un intervalo de tiempo que el arco recorrido (espacio). Por esto se define la **velocidad angular** ω como la rapidez con que se describe el ángulo (φ):

$$\boxed{\omega = \frac{\varphi}{t}} \qquad \boxed{\omega = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}}$$

Entre la velocidad lineal y la angular existe la siguiente relación:

$$\boxed{v = \omega . R}$$

El ángulo (φ), debe medirse en **radianes:**

$$\varphi\,(\text{rad}) = \frac{\text{longitud arco (m)}}{\text{radio circunferencia (m)}} = \frac{s}{R}$$

Según esta definición:

1 vuelta = 360 ^{0} = 2 π radianes
½ vuelta = 180 ^{0} = π radianes
¼ de vuelta = 90 ^{0} = π /2 radianes

Para convertir vueltas o grados a radianes:

$$30\,\cancel{^0}\ \frac{\pi\,\text{rad}}{180\,\cancel{^0}} = \frac{\pi}{6}\,\text{rad}$$

$$0{,}9\ \cancel{\text{vueltas}}\ \frac{2\pi\,\text{rad}}{1\ \cancel{\text{vuelta}}} = 1{,}8\,\pi\,\text{rad}$$

En el Sistema Internacional (S.I.) la velocidad angular se mide en $\frac{\text{rad}}{s}$ o en $\frac{1}{s} = s^{-1}$ (el radian no tiene dimensiones)

Otras unidades (no S.I.) son:

$$\frac{\text{vueltas}}{s} \quad ; \quad \frac{\text{revoluciones}}{\text{min}} = \text{r.p.m}$$

De la definición de velocidad angular se deduce la relación entre la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ y el ángulo girado $\boldsymbol{\varphi}$**:**

$$\boxed{\varphi = \omega\, t}$$

Si cuando empieza a contarse el tiempo (t = 0) el punto ya ha descrito un ángulo $\varphi_{0,}$ entonces el ángulo girado en un tiempo t será:

$$\boxed{\varphi = \varphi_0 + \omega\, t}$$

El movimiento circular uniforme **es un movimiento periódico**, ya que se repite a intervalos regulares de tiempo.

Se denomina **periodo (T)** al tiempo que el punto tarda en dar una vuelta (el movimiento vuelve a repetirse).

Se denomina **frecuencia (f)** al número de vueltas que el punto da en un segundo.

Periodo y frecuencia son magnitudes inversamente proporcionales:

$$\boxed{T = \frac{1}{f}\ ; \quad f = \frac{1}{T};\quad T\,.\,f = 1}$$

El periodo se mide en segundos (s)

La frecuencia se mide en s^{-1} o **Hz** (hertzios)

Teniendo en cuenta las definiciones de periodo, frecuencia y velocidad angular, se puede poner:

$$\omega = \frac{2\,\pi}{T} = 2\,\pi\,\frac{1}{T} = 2\,\pi\,f$$

Ejemplo 1

Un punto describe una trayectoria circular tardando 3,52 s en dar cinco vueltas. Calcular:

a) La velocidad angular en r.p.m y en rad/s

b) El periodo y la frecuencia del movimiento

c) El ángulo girado al cabo de 0,65 s de iniciado el movimiento.

Solución:

a) $\omega = \frac{5 \text{ vueltas}}{3{,}52 \cancel{s}} \frac{60 \cancel{s}}{1 \text{min}} = 85{,}23 \frac{\text{vueltas}}{\text{min}} = 85{,}23 \text{ r.p.m.}$

$$\omega = \frac{5 \cancel{\text{vueltas}}}{3{,}52 \text{ s}} \frac{2\pi \text{ rad}}{1 \cancel{\text{vuelta}}} = 2{,}84\ \pi \frac{\text{rad}}{\text{s}} = 2{,}84\ \pi \text{ s}^{-1}$$

b) $T = \frac{3{,}52 \text{ s}}{5} = 0{,}704 \text{ s}$ $\quad f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0{,}704 \text{ s}} = 1{,}420 \text{ s}^{-1} = 1{,}420 \text{ Hz}$

c) $\varphi = \omega \,.\, t = 2{,}84\ \pi \text{ s}^{-1} \,.\, 0{,}65 \text{ s} = 1{,}85\ \pi \text{ rad} \approx 5{,}81 \text{ rad}$

Ejemplo 2

En el laboratorio se estudia el movimiento de un disco, de radio 10 cm, que gira con velocidad constante, midiéndose el tiempo que tarda en dar cinco vueltas. Los valores obtenidos se dan en la tabla adjunta.

Medida	t (s) . Cinco vueltas
1	4,252
2	4,305
3	4,221
4	4,214
5	4,296

a) Calcular la velocidad angular del disco.

b) Determinar la velocidad lineal de un punto de su periferia y de otro situado a 3 cm del centro.

c) ¿Cuánto tardará en girar 120 ^{0}?

Solución:

a) Calculamos el periodo del movimiento (tiempo que tarda en dar una vuelta), hallando la media de los valores obtenidos y dividiendo por cinco:

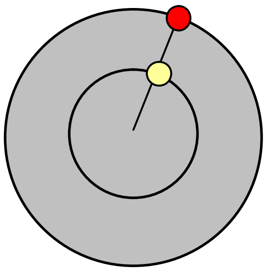
t_{med} = 4,258 s ; T = 0,852 s.

Cálculo de la velocidad angular :

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0{,}852 \text{ s}} = 2{,}35\pi \text{ s}^{-1} \approx 7{,}38 \text{ s}^{-1} = 7{,}38 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

b) Un punto situado en la periferia del disco describirá una circunferencia de radio 10 cm = 0,10 m

$v = \omega \,.\, R = 2{,}35\ \pi \text{ s}^{-1}.\ 0{,}10 \text{ m} = 0{,}235\ \pi \text{ s}^{-1} \approx 0{,}74 \text{ m .s}^{-1} = 0{,}74 \text{ m/s}$



Par el punto situado a 3 cm del centro : R = 3 cm = 0,03 m:

$v = \omega \,.\, R = 2{,}35\ \pi \text{ s}^{-1}.\ 0{,}03\text{m} = 0{,}0705\ \pi \text{ s}^{-1} \approx 0{,}22 \text{ m .s}^{-1} = 0{,}22 \text{ m/s}$

Como se deduce del cálculo ambos puntos giran con idéntica velocidad angular (ω), ya que recorren el mismo ángulo, pero la velocidad lineal aumenta a medida que nos desplazamos hacia la periferia.

c) Pasamos los grados a radianes: $120\cancel{^0} \frac{\pi \text{ rad}}{180\cancel{^0}} = 0{,}67\pi \text{ rad}$

$$\omega = \frac{\varphi}{t} \quad ; \quad t = \frac{\varphi}{\omega} = \frac{0{,}67\pi}{2{,}35\pi \text{ s}^{-1}} = 0{,}283 \text{ s}$$

Ejemplo 3

Un punto recorre una trayectoria circular de radio 36 cm con una frecuencia de 0,25 s^{-1}.

a) Calcular el periodo del movimiento.

b) Calcular la velocidad angular y la lineal.

c) Determinar el ángulo girado en 1,54 s.

Solución:

a) $T = \frac{1}{f} = \frac{1}{0{,}25\ s^{-1}} = 4\ s$

b) $\omega = 2\ \pi\ f = 2\ \pi\ 0{,}25\ s^{-1} = 0{,}5\ \pi\ s^{-1} \approx 1{,}57\ s^{-1}$

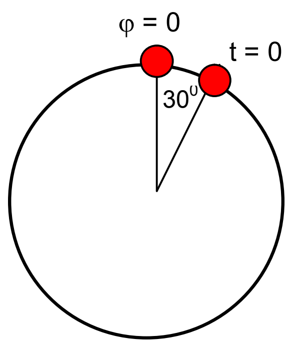
$v = \omega\ R = 0{,}5\ \pi\ s^{-1}\ 0{,}36\ m = 0{,}18\ \pi\ m\ s^{-1} = 0{,}18\ \pi\ m/s \approx 0{,}57\ m/s$

c) $\varphi = \omega\ t = 0{,}5\ \pi\ s^{-1}\ 1{,}54\ s = 0{,}77\ \pi\ rad$

$$0{,}77\ \pi\ \cancel{rad}\ \frac{180^0}{\pi\ \cancel{rad}} = 138{,}6^0$$

Ejemplo 4

Un punto gira describiendo círculos con velocidad constante de forma tal que describe un ángulo de 180 ^{0} en 1,543 s.



a) Calcular su velocidad angular

b) Determinar el periodo y la frecuencia del movimiento

c) Suponiendo que los ángulos empiezan a contarse a partir del punto más alto de la trayectoria y el cronómetro se pone en marcha cuando el punto está formando un ángulo de 30^0 con la vertical (ver esquema) ¿en qué posición se encuentra el punto cuando transcurran 2,500 s?

Solución:

a) $\omega = \frac{\pi\ rad}{1{,}543\ s} = 0{,}65\ \pi\ \frac{rad}{s} = 0{,}65\ \pi\ s^{-1}$

b) Tarda 1,543 s en dar media vuelta (180 ^{0}), luego tardará : 2 x1,543 = 3,086 s en dar una vuelta completa. Por tanto:

T = 3,086 s.

$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{3{,}086\ s} = 0{,}32\ s^{-1}$

c) $30\cancel{^0}\ \frac{\pi\ rad}{180\cancel{^0}} = \frac{\pi}{6}\ rad$

$\varphi = \varphi_0 + \omega t = \frac{\pi}{6} + 0{,}65\ \pi\ s^{-1}\ 2{,}500\ s = \frac{\pi}{6} + 1{,}625\ \pi = \pi\ (\frac{1}{6} + 1{,}625\ ) = 1{,}79\ \pi\ rad$

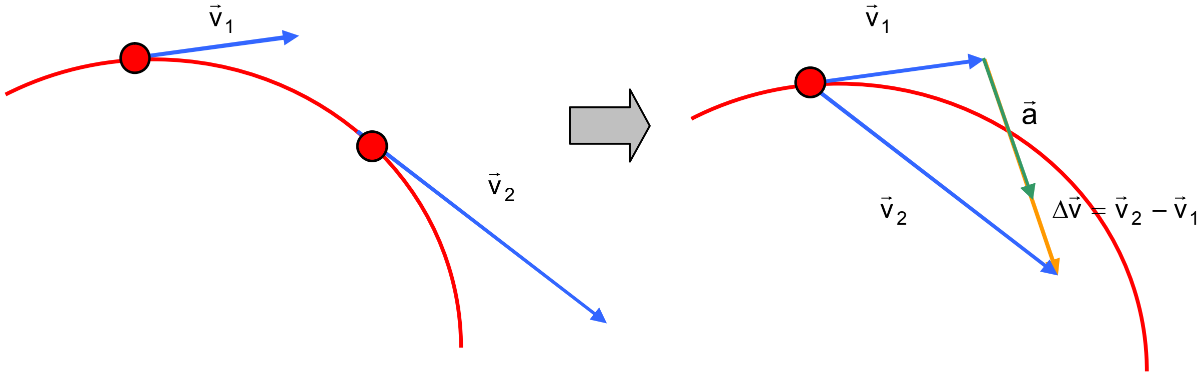
$$1{,}79\ \pi\ \cancel{rad}\ \frac{180^0}{\pi\ \cancel{rad}} = 322{,}2^0$$

COMPONENTES DE LA ACELERACIÓN EN UN MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME

Consideremos una trayectoria curva y un móvil que la recorre variando su velocidad (en módulo) de manera uniforme. Si queremos calcular el vector aceleración, deberemos calcular:

$$\overline{a} = \frac{\overrightarrow{v_2} - \overrightarrow{v_1}}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t}\,\Delta \vec{v}$$

Por tanto el vector $\vec{a}$ (en verde en la figura) será un vector que apunta en el sentido y dirección del vector $\Delta\vec{v}$ (en naranja en la figura)

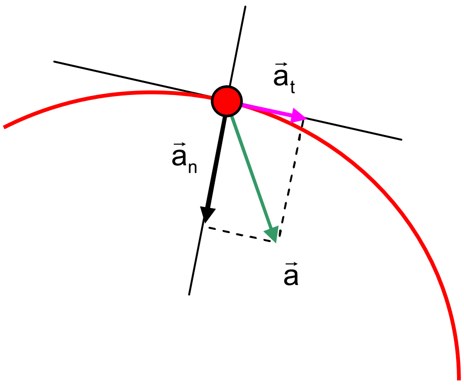


Como se puede ver el vector aceleración, $\vec{a}$, apuntará hacía "el interior" de la curva.

Si consideramos ahora un sistema de ejes coordenados y situamos uno de los ejes en la dirección de la tangente en ese punto y el otro perpendicular y descomponemos el vector $\vec{a}$ según esos ejes, obtenemos dos componentes de la aceleración que apuntan en la dirección de la tangente y perpendicularmente a ésta.

La primera componente se llama **aceleración tangencial** $\vec{a}_t$ y la segunda **aceleración normal** $\vec{a}_n$

$$\boxed{\overrightarrow{a} = \overrightarrow{a_t} + \overrightarrow{a_n}}$$



La aceleración tangencial mide la rapidez con que varía el módulo del vector velocidad.

La aceleración normal mide la rapidez con que varía la dirección del vector velocidad.

$$\boxed{a_t = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t}} \qquad \boxed{a_n = \frac{v^2}{R}}$$

En el movimiento circular uniforme la trayectoria es una circunferencia que es recorrida con velocidad constante.

Hay que tener en cuenta que aunque el módulo del vector velocidad no varía ($a_t = 0$), **su dirección varía constantemente (por tanto tiene aceleración normal).**

El movimiento circular uniforme tiene aceleración que apunta constantemente en la dirección del centro de la trayectoria. Es la aceleración normal o centrípeta

$$\left.\begin{aligned} a_n &= \frac{v^2}{R} \\ v &= \omega\, R \end{aligned}\right\} a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(\omega\, R)^2}{R} = \frac{\omega^2\, R^2}{R} = \omega^2\, R$$