

**Fuerza de gravedad.  
Campo gravitatorio**

**Problemas resueltos**

(Oviedo. 2020-2021. Junio.1)

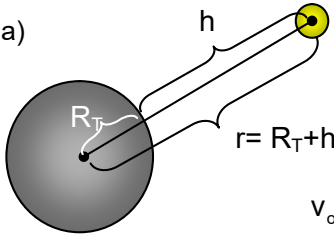
Se desea ubicar un satélite para comunicaciones, cuya masa es  $m = 1000 \text{ kg}$ , en una órbita circular 500 km por encima de la superficie terrestre. Calcule:

- La velocidad del satélite en dicha órbita.
- ¿A qué distancia de la Tierra debería situarse el satélite para que su energía mecánica fuera la mitad?

DATOS:  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{kg}^{-2}$ ;  $R_T = 6370 \text{ km}$ ;  $M_T = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$

**Solución:**

a)



$$r = R_T + h = (6370 + 500) \text{ km} = 6870 \text{ km} = 6,87 \cdot 10^6 \text{ m}$$

$$v_o = \sqrt{\frac{GM_T}{r}}; v_o = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N m}^2}{\text{kg}^2} \cdot 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{6,87 \cdot 10^6 \text{ m}}} = 7620 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 27 \cdot 431 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

b) Para una órbita circular:  $E_c = \frac{1}{2}|E_p|$ , por tanto:  $E_{\text{Mec}} = E_c + E_p = \frac{1}{2}E_p = -\frac{1}{2} \frac{GmM_T}{r}$

$$(E_{\text{Mec}})_1 = -\frac{1}{2} \frac{GmM_T}{r_1}; (E_{\text{Mec}})_2 = -\frac{1}{2} \frac{GmM_T}{r_2}$$

$$\text{Como: } (E_{\text{Mec}})_2 = \frac{1}{2}(E_{\text{Mec}})_1; (E_{\text{Mec}})_2 = -\frac{1}{2} \frac{GmM_T}{r_2} = -\frac{1}{4} \frac{GmM_T}{r_1}$$

$$r_2 = 2r_1 = 13 \cdot 740 \text{ km}$$

$$\text{Por tanto: } h_2 = r_2 - R_T = (13 \cdot 740 - 6370) \text{ km} = 7370 \text{ km}$$

(Oviedo. 2020-2021. Junio.2)

Io, una de las lunas de Júpiter, posee una intensa actividad volcánica y el material lanzado durante las erupciones puede alcanzar alturas de 500 km sobre la superficie. Calcule:

- La velocidad inicial del material volcánico en la superficie de Io.
- La velocidad de escape en Io.

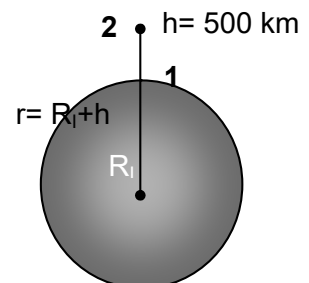
DATOS:  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{kg}^{-2}$ ;  $R_I = 1815 \text{ km}$ ;  $M_I = 8,94 \cdot 10^{22} \text{ kg}$

**Solución:**

- a) **Punto 1:** superficie de Io. **Punto 2:** 500 km por encima de la superficie

$$\left. \begin{array}{l} \text{Punto 1: } E_{c1} + E_{p1} = \frac{1}{2}mv^2 - G \frac{mM_I}{R_I} \\ \text{Punto 2: } E_{p2} = -G \frac{mM_I}{r} \end{array} \right\} \frac{1}{2}mv^2 - G \frac{mM_I}{R_I} = -G \frac{mM_I}{r}$$

$$v = \sqrt{2GM_I \left( \frac{1}{R_I} - \frac{1}{r} \right)} = \sqrt{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N m}^2}{\text{kg}^2} \cdot 8,94 \cdot 10^{22} \text{ kg} \left( \frac{1}{1,815 \cdot 10^6 \text{ m}} - \frac{1}{2,315 \cdot 10^6 \text{ m}} \right)} = 1,210^3 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 4320 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$



b)

$$v_{\text{Esc}} = \sqrt{\frac{2GM_I}{R_I}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N m}^2}{\text{kg}^2} \cdot 8,94 \cdot 10^{22} \text{ kg}}{1,815 \cdot 10^6 \text{ m}}} = 6570 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 6,57 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

(Oviedo. 2020-2021. Julio. 1)

En el año 2053 una astronauta, cuya masa es  $m = 60 \text{ kg}$ , se encuentra explorando el planeta X-1 de masa 10 veces menor y radio 10 veces menor que la Tierra. Calcule:

- ¿Cuál sería el peso de la astronauta en la superficie del planeta X-1?
- Unos meses más tarde aterriza con su nave en el planeta Z-1, cuyo radio es también 10 veces menor que el de la Tierra, pero su masa es 100 mayor que la Tierra. Calcule el peso de la astronauta en Z-1.

DATOS:  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{kg}^{-2}$

**Solución:**

- a) La gravedad en la superficie de un astro depende de su masa y su radio:  $g = G \frac{M}{R^2}$

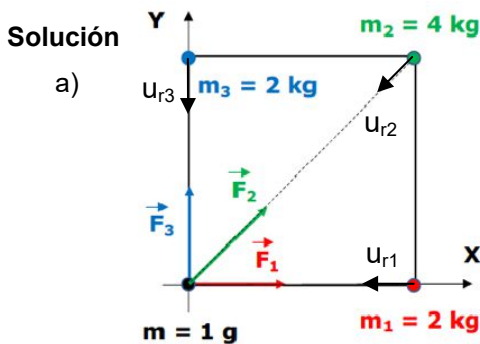
$$\left. \begin{aligned} g_T &= G \frac{M_T}{R_T^2} \\ g_{X-1} &= G \frac{M_{X-1}}{R_{X-1}^2} \end{aligned} \right\} \text{ Como : } R_{X-1} = \frac{R_T}{10} \text{ y } M_{X-1} = \frac{M_T}{10}; g_{X-1} = G \frac{\frac{M_T}{10}}{\left(\frac{R_T}{10}\right)^2} = 10 G \frac{M_T}{R_T^2} = 10 g_T$$

- b)  $\left. \begin{aligned} g_T &= G \frac{M_T}{R_T^2} \\ g_{Z-1} &= G \frac{M_{Z-1}}{R_{Z-1}^2} \end{aligned} \right\} \text{ Como : } R_{Z-1} = \frac{R_T}{10} \text{ y } M_{Z-1} = 100 M_T; g_{Z-1} = G \frac{100 M_T}{\left(\frac{R_T}{10}\right)^2} = 10^4 G \frac{M_T}{R_T^2} = 10^4 g_T$

(Oviedo. 2020-2021. Julio.2)

Se colocan en los vértices de un cuadrado de 1 m de lado tres masas puntuales de 2, 4 y 2 kg, cuyas coordenadas son: (0,1); (1,1) y (1,0), respectivamente. Calcule:

- La fuerza que ejercerán sobre una partícula de 1 g colocada en el cuarto vértice.
- El trabajo realizado por el campo gravitatorio cuando la partícula se haya desplazado hasta el centro del cuadrado. Explique si este desplazamiento de la partícula es espontáneo o no.



Gráfica: **Uniovi**  
(problemas resueltos)

$$\vec{F} = -G \frac{mM}{r^2} \vec{u}_r$$

$$\vec{u}_{r1} = -\vec{i}; \vec{u}_{r3} = -\vec{j}$$

$$\vec{u}_{r2} = -(\cos 45^\circ)\vec{i} - (\sin 45^\circ)\vec{j} = -0,707\vec{i} - 0,707\vec{j}$$

$$\vec{F}_1 = -G \frac{mm_1}{r_1^2} \vec{u}_{r1} = -G \frac{mm_1}{r_1^2} (-\vec{i}) = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N m}^2}{\text{kg}^2} \frac{10^{-3} \text{ kg} \cdot 2 \text{ kg}}{1^2 \text{ m}^2} \vec{i} = (1,33 \cdot 10^{-13}) \vec{i} \text{ (N)}$$

$$\vec{F}_3 = -G \frac{mm_3}{r_3^2} \vec{u}_{r3} = -G \frac{mm_3}{r_3^2} (-\vec{j}) = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N m}^2}{\text{kg}^2} \frac{10^{-3} \text{ kg} \cdot 2 \text{ kg}}{1^2 \text{ m}^2} \vec{j} = (1,33 \cdot 10^{-13}) \vec{j} \text{ (N)}$$

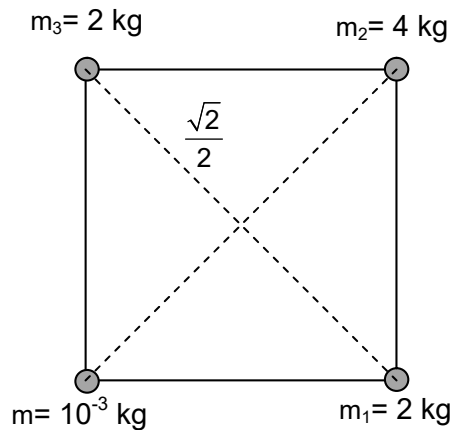
$$\vec{F}_2 = -G \frac{mm_2}{r_2^2} \vec{u}_{r2} = -G \frac{mm_2}{r_2^2} (-0,707\vec{i} - 0,707\vec{j}) = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N m}^2}{\text{kg}^2} \frac{10^{-3} \text{ kg} \cdot 4 \text{ kg}}{(\sqrt{2})^2 \text{ m}^2} (0,707\vec{i} + 0,707\vec{j})$$

$$\vec{F}_2 = (9,43 \cdot 10^{-14}) \vec{i} + (9,43 \cdot 10^{-14}) \vec{j} \text{ (N)}$$

$$\vec{F}_{\text{Tot}} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = (1,33 \cdot 10^{-13}) \vec{i} + [(9,43 \cdot 10^{-14}) \vec{i} + (9,43 \cdot 10^{-14}) \vec{j}] + (1,33 \cdot 10^{-13}) \vec{j}$$

$$\vec{F}_{\text{Tot}} = (2,27 \cdot 10^{-13}) \vec{i} + (2,27 \cdot 10^{-13}) \vec{j} \text{ (N); } F_{\text{Tot}} = 3,21 \cdot 10^{-13} \text{ (N)}$$

b)  $W = -\Delta E_p = E_{p_1} - E_{p_2}$  Considerando que el punto 1 está en el origen de coordenadas y que el punto 2 es está situado en el centro del cuadrado:



$$E_{p_{Tot}} = E_{p_1} + E_{p_2} + E_{p_3} = -G m \left( \frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} + \frac{m_3}{r_3} \right)$$

$$E_{p_{(1)}} = -6,67 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2} \cdot 10^{-3} kg \left( \frac{2}{1} + \frac{4}{\sqrt{2}} + \frac{2}{1} \right) \frac{kg}{m} = -4,55 \cdot 10^{-13} J$$

$$E_{p_{(2)}} = -6,67 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2} \cdot 10^{-3} kg \left( \frac{2+4+2}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \right) \frac{kg}{m} = -7,55 \cdot 10^{-13} J$$

$$W = E_{p_1} - E_{p_2} = -4,55 \cdot 10^{-13} J - (-7,55 \cdot 10^{-13} J) = 3 \cdot 10^{-13} (J)$$

Las masas se desplazan de forma espontánea si su energía potencial disminuye.

Como en el origen la energía potencial es mayor ( $-4,55 \cdot 10^{-13} J$ ) que en el centro ( $-7,55 \cdot 10^{-13} J$ ), la masa se desplazará espontáneamente sin necesidad de aportar energía externa.

(Oviedo. 2019-2020. Junio.1)

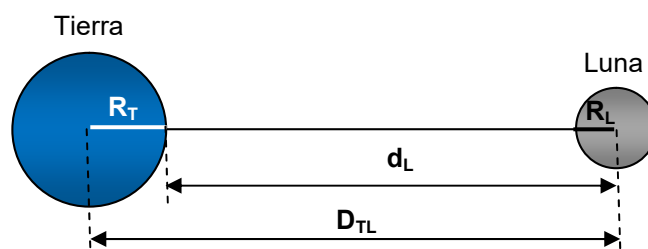
Suponiendo que la masa de una persona es de 75 kg y que la distancia Tierra - Luna es  $D_{T-L} = 3,84 \cdot 10^5 km$ , calcule:

- La fuerza gravitatoria que ejerce la Luna sobre una persona situada sobre la superficie terrestre.
- La relación entre dicha fuerza y la ejercida por la Tierra sobre la misma persona.
- Compare los valores de la velocidad de escape en las superficies de la Tierra y de la Luna.

DATOS:  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$ ;  $M_L = 7,35 \cdot 10^{22} kg$ ;  $R_L = 1740 km$ ;  $R_T = 6370 km$ ;  $M_T = 5,98 \cdot 10^{24} kg$

**Solución:**

a)



$$d_L = D_{TL} - R_T = (3,84 \cdot 10^5 - 6370) km = 3,78 \cdot 10^5 km$$

$$F_L = G \frac{M_L m}{d_L^2} = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2} \frac{7,35 \cdot 10^{22} kg \cdot 75 kg}{(3,78 \cdot 10^8)^2 m^2} = 2,57 \cdot 10^{-3} N$$

b)

$$\left. \begin{aligned} F_T &= G \frac{M_T m}{R_T^2} \\ F_L &= G \frac{M_L m}{d_L^2} \end{aligned} \right\} \frac{F_T}{F_L} = \frac{G \frac{M_T m}{R_T^2}}{G \frac{M_L m}{d_L^2}} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2} \frac{5,98 \cdot 10^{24} kg \cdot 75 kg}{(6,370 \cdot 10^6)^2 m^2}}{2,57 \cdot 10^{-3} N} = 2,87 \cdot 10^5$$

$$\boxed{F_T \approx 300\,000 F_L}$$

c)

$$v_e = \sqrt{2 \frac{GM}{R}} = \sqrt{2G} \sqrt{\frac{M}{R}} \begin{cases} v_L = 1,15 \cdot 10^{-5} \sqrt{\frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}} \sqrt{\frac{7,35 \cdot 10^{22} \text{kg}}{1,74 \cdot 10^6 \text{m}}} = 2363,5 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 2,36 \frac{\text{km}}{\text{s}} \\ v_T = 1,15 \cdot 10^{-5} \sqrt{\frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}} \sqrt{\frac{5,98 \cdot 10^{24} \text{kg}}{6,37 \cdot 10^6 \text{m}}} = 11142 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 11,14 \frac{\text{km}}{\text{s}} \end{cases}$$

$$\frac{v_T}{v_L} = \frac{11,14 \frac{\text{km}}{\text{s}}}{2,36 \frac{\text{km}}{\text{s}}} = 4,75; \boxed{v_T \approx 5v_L}$$

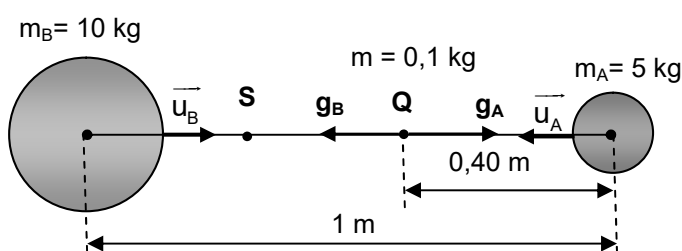
(Oviedo. 2019-2020. Junio.2)

Dos esferas A y B, con masas respectivas  $m_A = 5 \text{ kg}$  y  $m_B = 10 \text{ kg}$ , se encuentran en reposo a una distancia entre sus centros de  $1 \text{ m}$ . Una pequeña bola, de masa  $m = 100 \text{ g}$ , se deja en reposo en un punto Q del segmento que une A con B y a una distancia de  $40 \text{ cm}$  del centro de A. Asuma que las únicas fuerzas que actúan sobre la bola son las fuerzas gravitatorias debidas a las esferas A y B. Calcule:

- La intensidad de campo gravitatorio en el punto Q en que se sitúa inicialmente la bola.
- El trabajo realizado por el campo gravitatorio cuando la bola se haya desplazado hasta el punto S del mismo segmento y que dista  $80 \text{ cm}$  del centro de la esfera B. Razone si este desplazamiento de la bola será espontáneo.
- Busque el punto de equilibrio entre ambas esferas para la pequeña bola de masa  $m$ .

DATOS:  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$ **Solución:**

a)

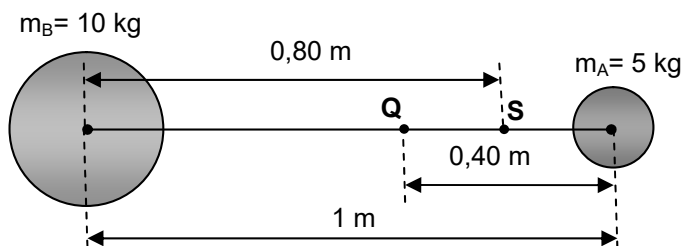


$$\vec{g}_A = -G \frac{m_A}{r_A^2} \vec{u}_A = -6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N m}^2}{\text{kg}^2} \frac{5 \text{ kg}}{0,40^2 \text{ m}^2} (-\vec{i}) = 2,08 \cdot 10^{-9} \vec{i} \left( \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right)$$

$$\vec{g}_B = -G \frac{m_B}{r_B^2} \vec{u}_B = -6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N m}^2}{\text{kg}^2} \frac{10 \text{ kg}}{0,60^2 \text{ m}^2} (\vec{i}) = -1,85 \cdot 10^{-9} \vec{i} \left( \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right)$$

$$\vec{g}_{\text{Tot}} = \vec{g}_A + \vec{g}_B = (2,08 \cdot 10^{-9} \vec{i} - 1,85 \cdot 10^{-9} \vec{i}) \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 0,23 \vec{i} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

b)



$$W = -\Delta E_p = -(E_{p(Q)} - E_{p(S)}) = E_{p(S)} - E_{p(Q)}$$

Para calcular la energía potencial en cada punto deberemos calcular la energía potencial debida a cada masa y sumarmas:

$$\left. \begin{aligned} E_{p_A} &= -G \frac{m m_A}{r_A} \\ E_{p_B} &= -G \frac{m m_B}{r_B} \end{aligned} \right\} E_{p_{Tot}} = -G m \left( \frac{m_A}{r_A} + \frac{m_B}{r_B} \right)$$

Para el primer punto (Q):

$$E_{p_{(Q)}} = -G m \left( \frac{m_A}{r_{A(Q)}} + \frac{m_B}{r_{B(Q)}} \right) = -6,67 \cdot 10^{-11} \frac{N m^2}{kg^2} \cdot 0,1 kg \left( \frac{5}{0,40} + \frac{10}{0,60} \right) \frac{kg}{m} = -1,95 \cdot 10^{-10} J$$

Para el segundo punto (S):

$$E_{p_{(S)}} = -G m \left( \frac{m_A}{r_{A(S)}} + \frac{m_B}{r_{B(S)}} \right) = -6,67 \cdot 10^{-11} \frac{N m^2}{kg^2} \cdot 0,1 kg \left( \frac{5}{0,20} + \frac{10}{0,80} \right) \frac{kg}{m} = -2,50 \cdot 10^{-10} J$$

Luego el trabajo realizado será:

$$W = -\Delta E_p = -(E_{p_{(S)}} - E_{p_{(Q)}}) = E_{p_{(Q)}} - E_{p_{(S)}} = -1,95 \cdot 10^{-10} J + 2,50 \cdot 10^{-10} J = 5,5 \cdot 10^{-11} J$$

Como el trabajo es positivo la masa va desde un punto de mayor energía potencial a otro de menor energía, pierde energía potencial, por lo que irá espontáneamente.

c) Si imaginamos que el punto buscado está situado a una distancia x de la masa A:

$m_B = 10 \text{ kg}$ 
 $d-x$ 
 $m_A = 5 \text{ kg}$

$g_B$ 
 $g_A$

$x$ 
 $d$

$$\left. \begin{aligned} g_A &= G \frac{m_A}{x^2} \\ g_B &= G \frac{m_B}{(d-x)^2} \end{aligned} \right\} g_A = g_B; G \frac{m_A}{x^2} = G \frac{m_B}{(d-x)^2}; \frac{x}{d-x} = \sqrt{\frac{m_A}{m_B}} = \sqrt{\frac{5 \text{ kg}}{10 \text{ kg}}} = 0,7071$$

$$\frac{x}{1-x} = 0,7071; x = 0,41 \text{ m}$$

(Oviedo. 2019-2020. Julio.1)

La aceleración de la gravedad en la superficie de Urano tiene un valor de 8.9 m/s<sup>2</sup>. Calcule:

- El radio medio de Urano.
- El peso en Urano de un objeto cuyo peso en la superficie de la Tierra es 1100 N.
- La velocidad de escape de la superficie de Urano.

DATOS:  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \text{ kg}^{-2}$ ;  $R_T = 6370 \text{ km}$ ,  $M_T = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ ;  $M_U = 8,68 \cdot 10^{25} \text{ kg}$

**Solución:**

- El valor de la aceleración de la gravedad en un planeta depende de la masa y radio del planeta y para Urano será:

$$g_U = G \frac{M_U}{R_U^2}$$

$$R_U = \sqrt{\frac{G M_U}{g_U}} = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \frac{N m^2}{kg^2} \cdot 8,68 \cdot 10^{25} \text{ kg}}{8,9 \frac{m}{s^2}}} = 2,55 \cdot 10^7 \text{ m} = 25 \text{ 500 km}$$

$$b) \quad \left. \begin{aligned} P_U &= m g_U \\ P_T &= m g_T \end{aligned} \right\} \frac{P_U}{P_T} = \frac{g_U}{g_T}; P_U = P_T \frac{g_U}{g_T} = 1100 \text{ N} \frac{8,9 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 999 \text{ N}$$

NOTA: Se supone conocido el valor de la gravedad en la superficie terrestre, aunque podría calcularse (se dan los datos en el enunciado) a partir de:

$$g_T = G \frac{M_T}{R_T^2}$$

$$c) \quad \left. \begin{aligned} v_e &= \sqrt{2 \frac{GM_U}{R_U}} \\ g_U &= G \frac{M_U}{R_U^2}; \frac{GM_U}{R_U} = g_U R_U \end{aligned} \right\} v_e = \sqrt{2 g_U R_U} = \sqrt{2 \cdot 8,9 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 2,55 \cdot 10^7 \text{ m}} = 21305 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 21,3 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

(Oviedo. 2019-2020. Julio. 2)

Un satélite para comunicaciones se encuentra describiendo una órbita circular alrededor de la Tierra con una velocidad de 6000 m/s. Calcule:

- ¿A qué distancia sobre la superficie de la Tierra se desplaza el satélite?
- ¿A qué velocidad se desplazaría si estuviera moviéndose en torno a Venus describiendo una órbita circular a una distancia de 900 km sobre la superficie de dicho planeta?
- La distancia entre los centros de Venus y la Tierra es de 0,27 UA. ¿En qué punto de la recta que los une la intensidad del campo gravitatorio terrestre anularía a la del venusiano? Dibuja ambos campos en dicho punto

DATOS:  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \text{ kg}^{-2}$ ;  $R_T = 6370 \text{ km}$ ;  $M_T = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ ;  $R_V = 6052 \text{ km}$ ;  $M_V = 4,87 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ ;  $1 \text{ UA} = 1,50 \cdot 10^{11} \text{ m}$ .

**Solución:**

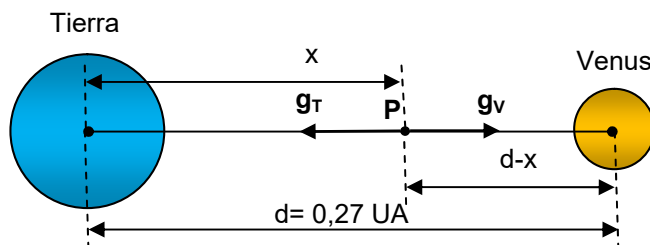
$$a) \quad v_o = \sqrt{\frac{GM}{r}}; r = \frac{GM}{V_o^2} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N m}^2}{\text{kg}^2} \cdot 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{(6 \cdot 10^3)^2 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}} = 1,11 \cdot 10^7 \text{ m} = 11 \cdot 100 \text{ km}$$

$$d = r - R_T = (11 \cdot 100 - 6370) \text{ km} = 4730 \text{ km}$$

b)

$$v_o = \sqrt{\frac{GM_V}{r_V}} = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N m}^2}{\text{kg}^2} \cdot 4,87 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{6,952 \cdot 10^6 \text{ m}}} = 6836 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 6,84 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

c)



$$\left. \begin{aligned} g_T &= G \frac{m_T}{x^2} \\ g_V &= G \frac{m_V}{(d-x)^2} \end{aligned} \right\} g_T = g_V; \cancel{G} \frac{m_T}{x^2} = \cancel{G} \frac{m_V}{(d-x)^2}; \frac{x}{d-x} = \sqrt{\frac{m_T}{m_V}} = \sqrt{\frac{5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{4,87 \cdot 10^{24} \text{ kg}}} = 1,228$$

$$\frac{x}{0,27 - x} = 1,228; x = 0,1423 \text{ UA}; 0,1423 \text{ UA} \frac{1,50 \cdot 10^6 \text{ km}}{1 \text{ UA}} = 2,14 \cdot 10^6 \text{ km}$$

(Oviedo. 2018-2019/ 4.1)

Una satélite para observar el clima se encuentra a una distancia de 705 km sobre la superficie de la Tierra describiendo una órbita circular. Calcule:

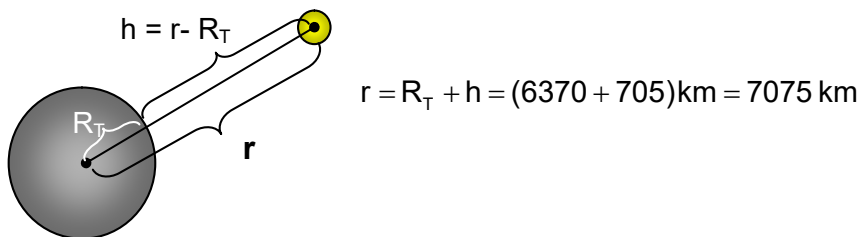
- A qué velocidad se desplazará el satélite.
- A qué distancia sobre la superficie de la Tierra deberá de situarse para fuera un satélite geoestacionario.

DATOS:  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2$ ;  $R_T = 6370 \text{ km}$ ;  $M_T = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ .

**Solución:**

- Teniendo en cuenta la condición para que un objeto describa una circunferencia ( $F_N = m a_n$ ), y sabiendo que la fuerza centrípeta es la de gravedad y el valor de la aceleración normal en un movimiento circular, se llega fácilmente a la expresión que nos da la velocidad orbital:

$$F_N = m a_n ; G \frac{mM}{r^2} = m \frac{v^2}{r} ; v_o = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$



$$v_o = \sqrt{\frac{GM}{r}} = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N m}^2}{\text{kg}^2} \cdot 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{7,075 \cdot 10^6 \text{ m}}} = 7509 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 7,51 \frac{\text{km}}{\text{s}} = 27 \,036 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

- Para que la órbita sea geoestacionaria el periodo orbital deberá de ser igual al de rotación del planeta. Para la Tierra  $T_{\text{rot}} = 24 \text{ h} = 8,64 \cdot 10^4 \text{ s}$ :

$$T^2 = \left( \frac{4\pi^2}{GM} \right) r^3$$

$$r = \sqrt[3]{\left( \frac{GM}{4\pi^2} \right) T^2} = \sqrt[3]{\left( \frac{6,6710^{-11} \frac{\text{N m}^2}{\text{kg}^2} \cdot 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{4\pi^2} \right) (8,6410^4)^2 \text{ s}^2} = 4,23 \cdot 10^7 \text{ m}$$

$$h = r - R_T = (4,23 \cdot 10^7 - 6,37 \cdot 10^6) \text{ m} = 3,59 \cdot 10^7 \text{ m}$$

(Oviedo. 2018-2019/ 3.1)

Se envía a Marte en un cohete un vehículo explorador cuyo peso en la Tierra es de 6860 N. Calcule:

- a) La aceleración de la gravedad en la superficie de Marte.  
 b) El peso del vehículo en la superficie de Marte.

DATOS:  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2$ ;  $R_T = 6370 \text{ km}$ ;  $M_T = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ ;  $R_M = 3400 \text{ km}$ ;  $M_M = 6,42 \cdot 10^{23} \text{ kg}$ .**Solución:**

- d) El valor de la aceleración de la gravedad en un planeta depende de la masa y radio del planeta y se puede calcular a partir de:

$$g = G \frac{M}{R^2}$$

Para Marte: 
$$g_M = G \frac{M_M}{R_M^2} = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N m}^2}{\text{kg}^2} \frac{6,42 \cdot 10^{23} \text{ kg}}{(3,4 \cdot 10^6)^2 \text{ m}^2} = 3,70 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

- e) El peso de un objeto (fuerza con que es atraído por el planeta) se calcula multiplicando su masa por el valor de la aceleración de la gravedad:

Para Marte:  $P_M = m g_M$        $\frac{P_M}{P_T} = \frac{m g_M}{m g_T}$ ;  $P_M = P_T \frac{g_M}{g_T}$   
 Para la Tierra:  $P_T = m g_T$

Calculamos la gravedad en la Tierra: 
$$g_T = G \frac{M_T}{R_T^2} = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N m}^2}{\text{kg}^2} \frac{5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{(6,37 \cdot 10^6)^2 \text{ m}^2} = 9,83 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$P_M = P_T \frac{g_M}{g_T} = 6860 \text{ N} \frac{3,70 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{9,83 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 2582 \text{ N}$$

(Oviedo. 2018-2019/ 2.1)

En el año 2019 una astronauta que forma parte de una misión espacial internacional llega a un planeta esférico en una lejana galaxia. Una vez en la superficie del planeta, la astronauta observa que al dejar caer una pequeña roca desde una altura de 1,90 m llega al suelo con una velocidad de 8 m/s. Si el radio del planeta es  $8,60 \cdot 10^7 \text{ m}$ , calcule:

- a) La aceleración de la gravedad en la superficie del planeta.  
 b) La velocidad de escape del planeta.

DATOS:  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2$ **Solución:**

- a) El valor de la aceleración de la gravedad se puede calcular considerando las ecuaciones del MRUA:

$$\left. \begin{aligned} s &= s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} g t^2 \\ v &= v_0 + g t \end{aligned} \right\} s = \frac{1}{2} g \left( \frac{v}{g} \right)^2 ; g = \frac{v^2}{2s} = \frac{8^2 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}{2 \cdot 1,90 \text{ m}} = 16,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

- b) La velocidad de escape del planeta vendrá dada por: 
$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

Considerando la expresión que nos da la gravedad en un planeta:  $g = G \frac{M}{R^2}$ ;  $GM = gR^2$

Combinando ambas expresiones

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{\frac{2gR^2}{R}} = \sqrt{2 \cdot 16,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 8,60 \cdot 10^7 \text{ m}} = 53755 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 53,8 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 193680 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$



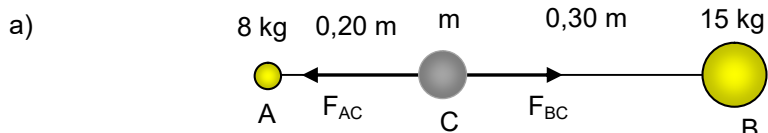
(Oviedo. 2018-2019/ 1.1)

Dos masas puntuales A ( $m_A=8$  kg) y B ( $m_B=15$  kg) se encuentran a una distancia fija de 50 cm. Una partícula de masa  $m$  se abandona inicialmente en reposo en un punto del segmento que conecta A y B a una distancia de 20 cm de la masa A.

- Calcule la aceleración que adquiere la partícula en este punto (módulo, dirección y sentido).
- Obtenga la energía potencial gravitatoria en este punto si la partícula tiene una masa de 5 kg.

DATOS:  $G= 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2$

**Solución:**



La fuerza actuante sobre C será la resultante de la suma (vectorial) de las fuerzas ejercidas sobre  $m$  por A ( $F_{AC}$ ) y por B ( $F_{BC}$ ):

$$\left. \begin{aligned} \vec{F}_{AC} &= -G \frac{m_A m}{d_A^2} \vec{i} \\ \vec{F}_{BC} &= -G \frac{m_B m}{d_B^2} \vec{i} \end{aligned} \right\} \vec{F}_{\text{Tot}} = G m \left( \frac{m_B}{d_B^2} - \frac{m_A}{d_A^2} \right) \vec{i}$$

$$\vec{F}_{\text{Tot}} = m \vec{a}; \vec{a} = G \left( \frac{m_B}{d_B^2} - \frac{m_A}{d_A^2} \right) \vec{i} = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N m}^2}{\text{kg}^2} \left( \frac{15}{0,30^2} - \frac{8}{0,20^2} \right) \frac{\text{kg}}{\text{m}^2} = -(2,22 \cdot 10^{-9}) \vec{i} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

- La energía potencial gravitatoria de una masa  $m$  colocada en el campo gravitatorio de otra masa  $M$  y situada a una distancia  $r$  viene dada por:

$$E_p = -G \frac{mM}{r}$$

La energía potencial de la masa considerada será la suma (escalar) de la energía potencial debida al campo gravitatorio de A y B:

$$\left. \begin{aligned} E_{p_A} &= -G \frac{m m_A}{r_A} \\ E_{p_B} &= -G \frac{m m_B}{r_B} \end{aligned} \right\} E_{p_{\text{Tot}}} = -G m \left( \frac{m_A}{r_A} + \frac{m_B}{r_B} \right)$$

$$E_{p_{\text{Tot}}} = -G m \left( \frac{m_A}{r_A} + \frac{m_B}{r_B} \right) = -6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N m}^2}{\text{kg}^2} 5 \text{ kg} \left( \frac{8}{0,20} + \frac{15}{0,30} \right) \frac{\text{kg}}{\text{m}} = -3,00 \cdot 10^{-8} \text{ J}$$

(Oviedo. 2017-2018/ 4.1)

Un satélite artificial de comunicaciones, de 500 kg de masa, describe una órbita circular de 9000 km de radio en torno a la Tierra.:

- Calcule su energía en esta órbita.
- En un momento dado, se decide variar el radio de la órbita, para lo cual se enciende uno de los cohetes propulsores del satélite, comunicándole un impulso tangente a su trayectoria antigua. Si el radio de la nueva órbita descrita por el satélite, en torno a la Tierra, es de 13 000 km, calcule el trabajo de los motores en el proceso.
- Determine el periodo de la nueva órbita.

DATOS:  $R_T = 6380 \text{ km}$ ;  $g_0 = 9,8 \text{ m/s}^2$ .

**Solución:**

a) La energía total para una órbita circular vale:  $E_{\text{Tot}} = \frac{1}{2} E_p = -\frac{1}{2} \frac{GM_T m}{r}$

El valor de la gravedad en la superficie de la Tierra ( $g_0$ ):  $g_0 = G \frac{M_T}{R_T^2}$ ;  $GM_T = g_0 R_T^2$

Combinando ambas expresiones obtenemos:

$$E_{\text{Tot}} = \frac{1}{2} E_p = -\frac{1}{2} \frac{g_0 R_T^2 m}{r} = -\frac{1}{2} \frac{9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} (6,38 \cdot 10^6)^2 \text{ m}^2 500 \text{ kg}}{9 \cdot 10^6 \text{ m}} = -1,11 \cdot 10^{10} \text{ J}$$

- b) La energía para la nueva órbita será:

$$E_2 = \frac{1}{2} E_{p_2} = -\frac{1}{2} \frac{g_0 R_T^2 m}{r_2} = -\frac{1}{2} \frac{9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} (6,38 \cdot 10^6)^2 \text{ m}^2 500 \text{ kg}}{1,3 \cdot 10^7 \text{ m}} = -7,67 \cdot 10^9 \text{ J}$$

Por tanto los motores deberán de suministrar la diferencia de energía entre ambas órbitas:

$$\Delta E_p = E_{p_2} - E_{p_1} = (-7,67 \cdot 10^9 + 1,11 \cdot 10^{10}) \text{ J} = 3,43 \cdot 10^9 \text{ J}$$

- c) Según la tercera ley de Kepler:

$$T^2 = k r^3 = \left( \frac{4 \pi^2}{GM} \right) r^3$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{GM}} = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{g_0 R_T^2}} = 2\pi \sqrt{\frac{(1,3 \cdot 10^7)^3 \text{ m}^3}{9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} (6,38 \cdot 10^6)^2 \text{ m}^2}} = 14 746 \text{ s} = 4 \text{ h } 5 \text{ min } 46 \text{ s}$$

(Oviedo. 2017-2018/ 3.1)

Un satélite gira en órbita circular alrededor de la Tierra a 3000 km de distancia de su centro. Si hubiese otra satélite girando también en órbita circular, con la mitad de velocidad que el anterior pero alrededor de Plutón:

- ¿A qué distancia del centro de Plutón estaría situado?
- ¿Cuál sería la relación entre los periodos de ambos satélites?

DATOS: La masa de Plutón es aproximadamente el 2% de la masa de la Tierra.

**Solución:**

- Para un objeto que describa una trayectoria circular debe de cumplirse:

$$F_N = m a_n ; G \frac{mM}{r^2} = m \frac{v^2}{r} ; v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

Planteando las velocidades orbitales para la Tierra y Plutón:

$$\left. \begin{array}{l} v_T = \sqrt{\frac{GM_T}{r_T}} \\ v_P = \sqrt{\frac{GM_P}{r_P}} \end{array} \right\} \frac{v_T}{v_P} = \frac{\sqrt{\frac{GM_T}{r_T}}}{\sqrt{\frac{GM_P}{r_P}}} = \sqrt{\frac{M_T r_P}{M_P r_T}}$$

Teniendo en cuenta la relación entre las velocidades y las masas:

$$\frac{v_T}{v_P} = \sqrt{\frac{M_T r_P}{M_P r_T}} ; \frac{v_T}{\frac{v_T}{2}} = \sqrt{\frac{M_T r_P}{0,02 M_T r_T}} ; 2 = \sqrt{\frac{r_P}{0,02 r_T}}$$

$$r_P = 0,08 r_T = 0,08 \cdot 3000 \text{ km} = 2400 \text{ km}$$

- Si suponemos órbitas circulares podemos relacionar velocidad orbital con periodo según:

$$v = \omega r = \frac{2\pi}{T} r$$

Aplicando la ecuación a Plutón y la Tierra y teniendo en cuenta la relación entre las velocidades orbitales y los radios, tendremos:

$$\left. \begin{array}{l} v_T = 2\pi \frac{r_T}{T_T} \\ v_P = 2\pi \frac{r_P}{T_P} \end{array} \right\} \frac{v_T}{v_P} = \frac{r_T T_P}{r_P T_T}$$

$$\frac{T_P}{T_T} = \frac{v_T r_P}{v_P r_T} = \frac{\frac{v_T}{2} \cdot 0,08 r_T}{\frac{v_T}{r_T}} = 0,16 ; \boxed{T_P = 0,16 T_T}$$

(Oviedo. 2017-2018/ 2.1)

En el punto A (2,0) se sitúa una masa de 2 kg y en el punto B (5,0) se coloca otra masa de 4 kg. Las longitudes se miden en metros. Calcula:

- El potencial del campo gravitatorio en el origen de coordenadas y en el punto (2,4).
- Si se sitúa una masa de 1 kg en el origen de coordenadas ¿Qué fuerza resultante actúa sobre ella?
- ¿Puede indicar el valor del trabajo realizado para llevar esa masa desde el origen de coordenadas hasta fuera del campo?

DATOS:  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2$

**Solución:**

- a) El potencial del campo gravitatorio en un punto viene dado por:  $V = \frac{E_p}{m} = -\frac{GM}{r}$

Calculando el potencial debido a cada masa y sumándolos (principio de superposición), tenemos:

$$V_A - \frac{GM_A}{r_A} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \cdot 2 \text{ kg}}{2 \text{ m}} = -6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{J}}{\text{kg}}$$

$$V_B - \frac{GM_B}{r_B} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \cdot 4 \text{ kg}}{5 \text{ m}} = -5,34 \cdot 10^{-11} \frac{\text{J}}{\text{kg}}$$

$$V_{(0,0)} = V_A + V_B = -(6,67 \cdot 10^{-11} + 5,34 \cdot 10^{-11}) \frac{\text{J}}{\text{kg}} = -1,20 \cdot 10^{-10} \frac{\text{J}}{\text{kg}}$$

Para el punto (2,4):

$$V_A - \frac{GM_A}{r_A} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \cdot 2 \text{ kg}}{4 \text{ m}} = -3,34 \cdot 10^{-11} \frac{\text{J}}{\text{kg}}$$

$$V_B - \frac{GM_B}{r_B} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \cdot 4 \text{ kg}}{5 \text{ m}} = -5,34 \cdot 10^{-11} \frac{\text{J}}{\text{kg}}$$

$$V_{(2,4)} = V_A + V_B = -(3,34 \cdot 10^{-11} + 5,34 \cdot 10^{-11}) \frac{\text{J}}{\text{kg}} = -8,68 \cdot 10^{-11} \frac{\text{J}}{\text{kg}}$$

- b) La fuerza resultante será la suma (vectorial) de las dos fuerzas debidas a las masas

$$\vec{F}_A - \frac{G m M_A}{r_A^2} (-\vec{i}) = -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \cdot 1 \text{ kg} \cdot 2 \text{ kg}}{2^2 \text{ m}^2} (-\vec{i}) = 3,34 \cdot 10^{-11} \vec{i} \text{ (N)}$$

$$\vec{F}_B - \frac{G m M_B}{r_B^2} (-\vec{i}) = -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \cdot 1 \text{ kg} \cdot 4 \text{ kg}}{5^2 \text{ m}^2} (-\vec{i}) = 1,07 \cdot 10^{-11} \vec{i} \text{ (N)}$$

$$\vec{F}_{\text{Tot}} = (3,34 \cdot 10^{-11} \vec{i} + 1,07 \cdot 10^{-11} \vec{i}) \text{ N} = 4,41 \cdot 10^{-11} \vec{i} \text{ (N)}$$

- c) El trabajo realizado por el campo (fuerza conservativa) viene dado por:

$$W = -\Delta E_p = E_{p_1} - E_{p_2} = m (V_1 - V_2)$$

Teniendo en cuenta que, por definición, a distancia infinita la energía potencial es nula:

$$W = -\Delta E_p = E_{p_1} - E_{p_2} = E_{p_1} = m V_1 = 1 \text{ kg} \left( -1,20 \cdot 10^{-10} \frac{\text{J}}{\text{kg}} \right) = -1,20 \cdot 10^{-10} \text{ J}$$

**Cuando una fuerza conservativa realiza trabajo negativo significa que aumenta la energía potencial de la masa.** Como las masas se mueven espontáneamente en el sentido en que disminuye la energía potencial el proceso no será espontáneo. **Por consiguiente para llevar la masa desde el origen al infinito tendríamos que proporcionar una energía de  $1,20 \cdot 10^{-10} \text{ J}$ .**

(Oviedo. 2017-2018/ 1.1)

El planeta Marte dista del Sol  $2,28 \cdot 10^{11}$  m, mientras que la Tierra dista  $1,5 \cdot 10^{11}$  m. Considerando para ambos planetas órbitas circulares:

- ¿Cuántos años terrestres transcurren en un periodo orbital de Marte?
- Determine la masa del Sol.

DATOS: 1 año terrestre = 365,25 días,  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$

**Solución:**

- Según la tercera ley de Kepler la relación entre periodo orbital y distancia (media) al Sol viene dada por:

$$T^2 = k r^3$$

Como en este caso el astro central (Sol) es el mismo para ambos planetas la constante será la misma, por tanto:

$$\left. \begin{array}{l} T_T^2 = k r_T^3 \\ T_M^2 = k r_M^3 \end{array} \right\} \frac{T_T^2}{T_M^2} = \frac{r_T^3}{r_M^3}$$

$$T_T = T_M \sqrt{\frac{r_T^3}{r_M^3}} = T_M \sqrt{\frac{(1,5 \cdot 10^{11})^3 \text{ m}^3}{(2,28 \cdot 10^{11})^3 \text{ m}^3}} = 0,534 T_M$$

$$T_M = 1,87 T_T$$

Si consideramos un año terrestre (365,25 días), el año marciano (una vuelta alrededor del Sol) serán: 683 días terrestres.

- Partiendo de la tercera ley de Kepler y teniendo en cuenta que la masa que aparece en la constante es la del astro central, Sol en este caso:

$$T^2 = k r^3 = \left( \frac{4 \pi^2}{G M_{\square}} \right) r^3$$

$$M_{\square} = 4 \pi^2 \frac{r^3}{G T^2} = 4 \pi^2 \frac{(1,5 \cdot 10^{11})^3 \text{ m}^3}{6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} (3,16 \cdot 10^7)^2 \text{ s}^2} = 2,00 \cdot 10^{30} \text{ kg}$$

(Oviedo. 2016-2017/ 4.1)

El planeta X tiene el mismo radio que la Tierra pero su densidad es el doble de la terrestre.

- ¿Qué valor tendrá la intensidad del campo gravitatorio en su superficie ( $g_{X0}$ )?
- ¿A qué altura el valor de  $g_x$  será el mismo que en la superficie terrestre?

DATOS:  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2$ ;  $R_T = 6370 \text{ km}$ ;  $M_T = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ ;  $g_0 = 9,8 \text{ m/s}^2$ .

**Solución:**

- Teniendo en cuenta que:  $d = m/V$ , y considerando que los planetas son esféricos, al tener idéntico radio tendrán el mismo volumen, de lo que se deduce que la masa del planeta X deberá de ser doble que la Tierra por tener doble densidad.

El valor de la intensidad del campo gravitatorio en la superficie de un planeta es:

$$g = G \frac{M}{R^2} \quad \text{Por tanto, al tener el mismo radio y doble masa: } g_{0X} = 2 g_0.$$

- 

$$g_x = g_0 = G \frac{2 M_T}{(R_x + h)^2}; (R_x + h) = \sqrt{\frac{2 G M}{g_0}}$$

$$(R_x + h) = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \cdot 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} = 9022195 \text{ m} = 9022 \text{ km}$$

$$h = (9022 - 6370) \text{ km} = 2652 \text{ km}$$

(Oviedo. 2016-2017/ 3.1)

Un minisatélite artificial de 310 kg utilizado para aplicaciones de observación de la Tierra con alta resolución, gira en una órbita circular de 600 km de altura sobre la superficie terrestre.

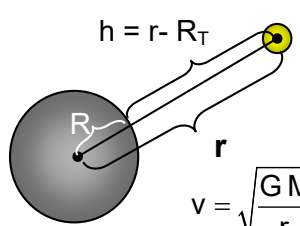
Calcule:

- Velocidad de la órbita y periodo orbital.
- Energía potencial y energía mecánica del mismo.
- Energía necesaria para que partiendo de esa órbita se coloque en otra órbita circular a una altura de 1000 km.

DATOS:  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$ ;  $R_T = 6370 \text{ km}$ ;  $M_T = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$

**Solución:**

- Teniendo en cuenta la condición para que un objeto describa una circunferencia ( $F_N = m a_n$ ), y sabiendo que la fuerza centrípeta es la de gravedad y el valor de la aceleración normal en un movimiento circular, se llega fácilmente a la expresión que nos da la velocidad orbital:

$$F_N = m a_n; G \frac{mM}{r^2} = m \frac{v^2}{r}; v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$


$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}} = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \cdot 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{6,970 \cdot 10^6 \text{ m}}} = 7565 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 7,57 \frac{\text{km}}{\text{s}} = 27 \, 252 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Teniendo en cuenta la tercera ley de Kepler:

$$T^2 = k r^3 = \left( \frac{4 \pi^2}{GM} \right) r^3$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{GM}} = 2\pi \sqrt{\frac{(6,97 \cdot 10^6)^3 \text{ m}^3}{6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \cdot 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}}} = 5789 \text{ s} = 1 \text{ h } 36 \text{ min } 29 \text{ s}$$

- La energía potencial:

$$E_p = -G \frac{M_T m}{r} = -6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \frac{5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg} \cdot 310 \text{ kg}}{6,97 \cdot 10^6 \text{ m}} = -1,77 \cdot 10^{10} \text{ J}$$

Para una órbita circular la energía mecánica (suma de cinética y potencial) es la mitad de la potencial:

$$E_{\text{Tot}} = \frac{1}{2} E_p = \frac{1}{2} (-1,77 \cdot 10^{10}) \text{ J} = -8,85 \cdot 10^9 \text{ J}$$

- La energía total para una órbita situada a 1000 km de altura será:

$$E_{\text{Tot}} = \frac{1}{2} E_p = -\frac{1}{2} \frac{GM_T m}{r} = -\frac{1}{2} \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \cdot 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg} \cdot 310 \text{ kg}}{7,37 \cdot 10^6 \text{ m}} = -8,39 \cdot 10^9 \text{ J}$$

Por tanto para cambiar de órbita habrá que suministrar la diferencia de energía entre ambas:

$$\Delta E = E_2 - E_1 = (-8,39 \cdot 10^9 + 8,85 \cdot 10^9) \text{ J} = 4,60 \cdot 10^8 \text{ J}$$

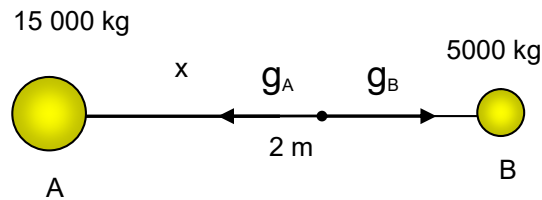
(Oviedo. 2016-2017/ 2.1)

Dos masas de 5000 y 15 000 kg distan 2 m entre sus centros. Determine y discuta la posición del punto o puntos en que la intensidad del campo gravitatorio es nula. ¿En este lugar cuál es el potencial del campo?

DATOS:  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2$

**Solución:**

a)



En la recta que une ambas masas habrá un punto en el que el campo resultante será nulo, ya que el campo gravitatorio creado por una masa es entrante (hacia la masa) y, en consecuencia, tendrán sentidos contrarios (ver esquema). Llamemos  $x$  a la distancia, medida a partir de la masa A (15 000 kg), a la que esto sucede. Podemos plantear:

$$g = G \frac{M}{r^2}$$

$$\cancel{G} \frac{M_A}{r_A^2} = \cancel{G} \frac{M_B}{r_B^2}; \frac{M_A}{r_A^2} = \frac{M_B}{r_B^2}$$

$$\frac{M_A}{x^2} = \frac{M_B}{(r-x)^2}; r-x = \sqrt{\frac{M_A}{M_B}} = \sqrt{\frac{15\,000 \text{ kg}}{5000 \text{ kg}}} = \sqrt{3}$$

$$x = \left( \frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} \right) r = 0,634 \cdot 2 \text{ m} = 1,27 \text{ m}$$

b) El potencial del campo gravitatorio en un punto viene dado por:  $V = \frac{E_p}{m} = -\frac{GM}{r}$

Calculando el potencial debido a cada masa y sumándolos (principio de superposición), tenemos:

$$V_A = \frac{GM_A}{r_A} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N m}^2}{\text{kg}^2} \cdot 15\,000 \text{ kg}}{1,27 \text{ m}} = -7,88 \cdot 10^{-7} \frac{\text{J}}{\text{kg}}$$

$$V_B = \frac{GM_B}{r_B} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N m}^2}{\text{kg}^2} \cdot 5000 \text{ kg}}{0,73 \text{ m}} = -4,57 \cdot 10^{-7} \frac{\text{J}}{\text{kg}}$$

$$V_{(0,0)} = V_A + V_B = -(7,88 \cdot 10^{-7} + 4,57 \cdot 10^{-7}) \frac{\text{J}}{\text{kg}} = -1,25 \cdot 10^{-6} \frac{\text{J}}{\text{kg}}$$

(Oviedo. 2016-2017/ 1.1)

El planeta Tierra tiene 6370 km de radio y la aceleración de la gravedad en su superficie es  $9,8 \text{ m/s}^2$ . Calcule:

- a) La densidad media del planeta.  
b) La velocidad de escape desde su superficie.

DATOS: Volumen de la esfera:  $V = \frac{4}{3} \pi r^3$ ,  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2$

**Solución:**

- a) El valor de la intensidad del campo gravitatorio en la superficie de la Tierra es:  $g_0 = G \frac{M_T}{R_T^2}$   
Por tanto:  $M_T = g_0 \frac{R_T^2}{G}$

$$d_T = \frac{M_T}{V_T} = \frac{g_0 \frac{R_T^2}{G}}{\frac{4}{3} \pi r^3} = \frac{3}{4} \frac{g_0}{\pi G R_T} = \frac{3}{4} \frac{9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{\pi \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N m}^2}{\text{kg}^2} \cdot 6,370 \cdot 10^6 \text{ m}} = 5,51 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 5,51 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$$

- b) La velocidad de escape de un planeta viene dada por:  $v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$

Considerando el campo gravitatorio en la superficie de la Tierra:  $g_0 = G \frac{M_T}{R_T^2}$ ;  $GM_T = g_0 R_T^2$

Combinando ambas expresiones:

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}} = \sqrt{\frac{2g_0 R_T^2}{R_T}} = \sqrt{2 \cdot 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 6,37 \cdot 10^6 \text{ m}} = 11\,173 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 11,2 \frac{\text{km}}{\text{s}} = 40\,320 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

(Oviedo. 2015-2016/ 8.1)

Calcula la distancia Tierra-Luna, con el dato que la Luna tarda 28 días en su órbita circular alrededor de la Tierra. Calcule:

DATOS:  $R_T = 6370 \text{ km}$ ,  $g_0 = 9,8 \text{ m/s}^2$ .

Teniendo en cuenta la tercera ley de Kepler y el valor del campo gravitatorio en la superficie de la Tierra

$$\left. \begin{aligned} g_0 &= G \frac{M_T}{R_T^2}; GM_T = g_0 R_T^2 \\ T^2 &= \left( \frac{4\pi^2}{GM_T} \right) r^3 \end{aligned} \right\} T^2 = \left( \frac{4\pi^2}{g_0 R_T^2} \right) r^3; r = \sqrt[3]{\frac{g_0 R_T^2 T^2}{4\pi^2}}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{g_0 R_T^2 T^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} (6,370 \cdot 10^6)^2 \text{ m}^2 (2,42 \cdot 10^6)^2 \text{ s}^2}{4\pi^2}} = 3,90 \cdot 10^8 \text{ m} = 3,90 \cdot 10^5 \text{ km}$$



(Oviedo. 2015-2016/ 7.1)

Un satélite de masa  $m=250$  kg describe una órbita circular sobre el Ecuador de la Tierra, a una distancia tal que su periodo orbital coincide con el de rotación de la Tierra (satélite geostacionario). Calcula:

- La altura a la que se encuentra el satélite respecto a la superficie terrestre.
- La energía mínima necesaria para situarlo en dicha órbita.

DATOS:  $G=6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$ ;  $R_T=6,40 \cdot 10^6 \text{ m}$ ;  $M_T=5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$

**Solución:**

- Usamos la tercera ley de Kepler, teniendo en cuenta que al astro central es la Tierra y que el periodo orbital para un satélite geostacionario ha de ser igual al de rotación del planeta (Tierra). Esto es:  $24 \text{ h} = 86\,400 \text{ s}$ :

$$T^2 = \left( \frac{4\pi^2}{GM_T} \right) r^3; r = \sqrt[3]{\frac{GM_T T^2}{4\pi^2}}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} 5,97 \cdot 10^{24} \text{kg} (8,64 \cdot 10^4)^2 \text{s}^2}{4\pi^2}} = 4,22 \cdot 10^7 \text{ m} = 42\,200 \text{ km}$$

- La energía total de la órbita, considerada como circular, es igual a la mitad de su energía potencial:

$$E_{\text{Tot}} = \frac{1}{2} E_p = -\frac{1}{2} \frac{GM_T m}{r} = -\frac{1}{2} \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} 5,98 \cdot 10^{24} \text{kg} 250 \text{kg}}{4,22 \cdot 10^7 \text{ m}} = -1,18 \cdot 10^{12} \text{ J}$$

(Oviedo. 2015-2016/ 6.2)

Si la masa del Sol es aproximadamente  $2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$  y el radio que describe la Tierra en su movimiento (supuesto circular) alrededor del Sol es  $1,5 \cdot 10^8 \text{ km}$ , deduce el periodo de traslación de la Tierra alrededor del Sol. Expresa el resultado en el S.I y en días.

DATOS:  $G=6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$

**Solución:**

Usamos la tercera ley de Kepler, teniendo en cuenta que al astro central es el Sol:

$$T^2 = \left( \frac{4\pi^2}{GM_\odot} \right) r^3; T = \sqrt{\left( \frac{4\pi^2}{6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} 2,0 \cdot 10^{30} \text{kg}} \right) (1,5 \cdot 10^{11})^3 \text{m}^3} = 3,16 \cdot 10^7 \text{ s} = 366 \text{ días}$$

(Oviedo. 2015-2016/ 5.1)

La masa del planeta Júpiter es, aproximadamente, 318 veces la de la Tierra, y su diámetro es 11 veces mayor. Con estos datos calcula el peso que tendrá en Júpiter una astronauta cuyo peso en la Tierra sea de 750 N

**Solución:**

Teniendo en cuenta la expresión que nos da el valor de la aceleración de la gravedad  $g = G \frac{M}{R^2}$  :

$$\left. \begin{array}{l} P_T = m g_T \\ P_J = m g_J \end{array} \right\} \frac{P_T}{P_J} = \frac{m g_T}{m g_J}; P_J = P_T \frac{g_J}{g_T} = P_T \frac{G \frac{M_J}{R_J^2}}{G \frac{M_T}{R_T^2}} = \frac{M_J R_T^2}{M_T R_J^2} = \frac{318 M_T R_T^2}{M_T 5,5^2 R_T^2} = 10,5; \boxed{P_J = 10,5 P_T}$$

(Oviedo. 2015-2016/ 3.1)

Dos planetas iguales orbitan alrededor de una estrella de masa mucho mayor. El planeta A se mueve en una órbita circular de  $10^8$  km de radio y 2 años de periodo. El otro planeta, B; lo hace en una órbita elíptica, siendo la distancia en la posición más cercana a la estrella  $10^8$  km y en la más alejada  $2 \cdot 10^8$  km.

- Calcular la masa de la estrella.
- Determinar el periodo del planeta B

DATOS:  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$ **Solución:**

- Usamos la tercera ley de Kepler y tenemos en cuenta que el astro central es la estrella de masa desconocida:

$$T^2 = \left( \frac{4\pi^2}{GM_E} \right) r^3; M_E = \left( \frac{4\pi^2}{G} \right) \frac{r^3}{T^2} = \left( \frac{4\pi^2}{6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}} \right) \frac{(1,0 \cdot 10^{11})^3 \text{m}^3}{(6,31 \cdot 10^7)^2 \text{s}^2} = 1,5 \cdot 10^{29} \text{kg}$$

- Como la órbita es elíptica en la expresión de la tercera ley de Kepler consideraremos como distancia el valor del semieje mayor:  $2 \cdot 10^8$  km:

$$T^2 = \left( \frac{4\pi^2}{GM_E} \right) r^3; T = \sqrt{\left( \frac{4\pi^2}{6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \cdot 1,5 \cdot 10^{29} \text{kg}} \right) (2,0 \cdot 10^{11})^3 \text{m}^3} = 1,8 \cdot 10^8 \text{ s} = 5,6 \text{ años}$$

(Oviedo. 2015-2016/ 1.1)

Un satélite de  $2 \cdot 10^3$  kg de masa gira alrededor de la Tierra en una órbita circular de  $2 \cdot 10^4$  km de radio.

- Sabiendo que la gravedad en la superficie de la Tierra es de  $9,8 \text{ m/s}^2$ , ¿cuál será el valor de la gravedad en esta órbita?
- Cuánto vale la velocidad angular del planeta?

DATOS:  $R_T = 6370 \text{ km}$ **Solución:**

- El valor de la gravedad en la superficie de la Tierra viene dado por  $g_0 = G \frac{M_T}{R_T^2}$

$$g_0 = G \frac{M_T}{R_T^2}; G M_T = g_0 R_T^2$$

El valor de la gravedad a una distancia  $r$ , será:  $g = G \frac{M_T}{r^2}$ , operando tenemos:

$$g = G \frac{M_T}{r^2} = \frac{g_0 R_T^2}{r^2} = \frac{9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} (6,37 \cdot 10^6)^2 \text{m}^2}{(2 \cdot 10^7)^2 \text{m}^2} = 0,99 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \approx 1,0 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

- 

$$T^2 = \left( \frac{4\pi^2}{GM_T} \right) r^3 = \left( \frac{4\pi^2}{g_0 R_T^2} \right) r^3; T = \frac{2\pi}{R_T} \sqrt{\frac{r^3}{g_0}} = \frac{2\pi}{6,37 \cdot 10^6 \text{m}} \sqrt{\frac{(2 \cdot 10^7)^3 \text{m}^3}{9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} = 2,82 \cdot 10^4 \text{ s} = 7 \text{ h } 50 \text{ min}$$

(Oviedo. 2014-2015/ 8.2)

Calcula razonadamente el valor de la intensidad del campo gravitatorio en la superficie de un planeta cuya masa es 3 veces la masa de la Tierra y su radio 2 veces el radio terrestre.

DATOS: Intensidad del campo gravitatorio en la superficie de la Tierra:  $g_0 = 9,8 \text{ m/s}^2$ .

**Solución:**

El valor de la intensidad del campo gravitatorio en la superficie de un planeta viene dado por:

$$g = G \frac{M}{R^2}$$

Aplicándolo a la Tierra y al planeta considerado:

$$\left. \begin{array}{l} g_T = G \frac{M_T}{R_T^2} \\ g_P = G \frac{M_P}{R_P^2} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} g_T = \frac{M_T R_P^2}{M_P R_T^2} = \frac{M_T \cancel{4} R_T^2}{3 M_T \cancel{R_T^2}} = \frac{4}{3}; g_P = \frac{3}{4} g_T = \frac{3}{4} 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 7,4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \end{array} \right.$$

(Oviedo. 2014-2015/ 7.1)

Determina a qué altura sobre la superficie de la Tierra la intensidad del campo gravitatorio es un 25% de su valor sobre la superficie terrestre.

DATOS:  $g_0 = 9,8 \text{ m/s}^2$ ;  $R_T = 6370 \text{ km}$ ;  $M_T = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$

**Solución:**

Teniendo en cuenta el valor de la intensidad del campo gravitatorio en la superficie de la Tierra:

$$g_0 = G \frac{M_T}{R_T^2}$$

A una altura  $h$  sobre su superficie, valdría:  $g = G \frac{M_T}{(R_T + h)^2} = \frac{g_0}{4}$

Combinando ambas expresiones:

$$\left. \begin{array}{l} g = G \frac{M_T}{(R_T + h)^2} \\ g_0 = G \frac{M_T}{R_T^2} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} g = \frac{R_T^2}{(R_T + h)^2} g_0; (R_T + h) = \sqrt{\frac{g_0}{g}} = \sqrt{\frac{g_0}{g_0/4}} = 2 R_T \\ R_T + h = 2 R_T; h = R_T = 6370 \text{ km} \end{array} \right.$$

$$R_T + h = 2 R_T; h = R_T = 6370 \text{ km}$$

(Oviedo. 2014-2015/ 5.1)

La aceleración de la gravedad en la superficie de Marte es  $3,7 \text{ m/s}^2$ . Si el radio de la Tierra es de  $6370 \text{ km}$  y la masa de Marte  $0,11$  veces la de la Tierra, calcula:

- El radio de Marte.
- La velocidad de escape desde la superficie de Marte.
- El peso en dicha superficie de un astronauta de  $70 \text{ kg}$  de masa.

DATOS:  $g_0 = 9,8 \text{ m/s}^2$

**Solución:**

$$\left. \begin{array}{l} g_0 = G \frac{M_T}{R_T^2} \\ g_M = G \frac{M_M}{R_M^2} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} g_0 = \frac{M_T R_M^2}{M_M R_T^2} = \frac{M_T R_M^2}{0,11 M_T R_T^2}; R_M = R_T \sqrt{0,11 \frac{g_0}{g_M}} = 6370 \text{ km} \sqrt{0,11 \frac{9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{3,7 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} = 3438 \text{ km} \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } & \left. \begin{aligned} v_e &= \sqrt{\frac{2GM}{r}}; v_{e(M)} = \sqrt{\frac{2GM_M}{R_M}} \\ g_M &= \frac{GM_M}{R_M^2}; GM_M = g_M R_M^2 \end{aligned} \right\} v_{e(M)} = \sqrt{\frac{2g_M R_M^2}{R_M}} = \sqrt{2g_M R_M} \\
 & v_{e(M)} = \sqrt{2g_M R_M} = \sqrt{2 \cdot 3,7 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 3,44 \cdot 10^6 \text{m}} = 5045 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 5,1 \frac{\text{km}}{\text{s}} = 18\,360 \frac{\text{km}}{\text{h}} \\
 \text{c) } & P = m g_M = 70 \text{ kg} \cdot 3,7 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 259 \text{ N}
 \end{aligned}$$

(Oviedo. 2014-2015/ 4.1)

Determina a qué altura sobre la superficie de la Tierra la aceleración gravitatoria se reduce a la mitad sobre la superficie terrestre.

DATOS:  $g_0 = 9,8 \text{ N/kg}$ ;  $R_T = 6370 \text{ km}$ .

**Solución:**

Teniendo en cuenta el valor de la intensidad del campo gravitatorio en la superficie de la Tierra:

$$g_0 = G \frac{M_T}{R_T^2}$$

A una altura  $h$  sobre su superficie, valdría:

$$g = G \frac{M_T}{(R_T + h)^2} = \frac{g_0}{2}$$

Combinando ambas expresiones:

$$\begin{aligned}
 g &= G \frac{M_T}{(R_T + h)^2} \\
 g_0 &= G \frac{M_T}{R_T^2}
 \end{aligned}
 \left\{ \begin{aligned} g &= \frac{R_T^2}{(R_T + h)^2}; \frac{(R_T + h)}{R_T} = \sqrt{\frac{g_0}{g}} = \sqrt{\frac{g_0}{\frac{g_0}{2}}} = \sqrt{2} \end{aligned} \right.$$

$$R_T + h = \sqrt{2} R_T; h = (\sqrt{2} - 1) R_T = (\sqrt{2} - 1) 6370 \text{ km} = 2639 \text{ km}$$

(Oviedo. 2014-2015/ 3.1)

Dos chicas trabajan pilotando cohetes espaciales. Carmen es la capitana de un cohete que describe una órbita circular alrededor de la Tierra y tarda 1 h y 30 min en dar una vuelta completa alrededor de la misma. María pilota otro cohete que también describe una órbita circular alrededor de la Tierra, pero que tarda 1 h en dar una vuelta alrededor de esta.

Blanca trabaja en el centro de control y quiere determinar la distancia mínima a la que están separadas las naves de Carmen y María cuando están alineadas y se da cuenta que coincide con la diferencia de radios de las dos órbitas. ¿Cuál es el valor de la distancia mínima a la que están separadas ambas naves cuando están alineadas?

DATOS:  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$ ;  $M_T = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$

**Solución:**

$$T^2 = k r^3; r = \sqrt[3]{\frac{T^2}{k}}$$

$$d_m = r_C - r_M = \sqrt[3]{\frac{T_C^2}{k}} - \sqrt[3]{\frac{T_M^2}{k}} = \sqrt[3]{\frac{1}{k}} \left( \sqrt[3]{T_C^2} - \sqrt[3]{T_M^2} \right) = \sqrt[3]{\left( \frac{GM_T}{4\pi^2} \right)} \left( \sqrt[3]{T_C^2} - \sqrt[3]{T_M^2} \right)$$

$$d_m = \sqrt[3]{\left( \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \cdot 5,98 / 9 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{4\pi^2} \right)} \left( \sqrt[3]{5400^2 \text{ s}^2} - \sqrt[3]{3600^2 \text{ s}^2} \right) = 1575\,974 \text{ m} = 1576 \text{ km}$$

(Oviedo. 2013-2014/ 7.1)

Un trozo de chatarra espacial de 25 kg que se dirige directo hacia la Tierra, en caída libre, tiene una velocidad de 10 m/s a una altura sobre la superficie terrestre de 300 km. Calcula:

- El peso del trozo de chatarra a dicha altura.
- La energía mecánica del trozo de chatarra a esa altura.
- La velocidad con la que impactará sobre la superficie terrestre despreciando la fricción con la atmósfera.

DATOS:  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$ ;  $M_T = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ ;  $R_T = 6370 \text{ km}$

**Solución:**

- a) Calculando el valor de la gravedad a esa altura, el peso será:

$$g = G \frac{M_T}{(R_T + h)^2} = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2/\text{kg}^2 \cdot 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{(6,670 \cdot 10^6 \text{ m})^2} = 8,97 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$P = m g = 25 \text{ kg} \cdot 8,97 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 224 \text{ N}$$

- b) Suponiendo una órbita circular la energía mecánica (suma de cinética más potencial) es igual a la mitad de la energía potencial:

$$E_{\text{mec}} = \frac{1}{2} E_p = -\frac{1}{2} \frac{G M_T m}{r} = -\frac{1}{2} \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \cdot 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg} \cdot 25 \text{ kg}}{6,670 \cdot 10^6 \text{ m}} = -7,48 \cdot 10^8 \text{ J}$$

- c) Cuando llegue a la superficie de la Tierra tendrá una energía potencial de:

$$E_p = -\frac{G M_T m}{r} = -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \cdot 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg} \cdot 25 \text{ kg}}{6,370 \cdot 10^6 \text{ m}} = -1,57 \cdot 10^9 \text{ J}$$

Haciendo un balance de energía considerando que el punto 1 (de partida) está situado a una altura de 300 km y que el punto 2 (de llegada) se sitúa sobre la superficie terrestre, y considerando que no hay rozamiento, luego la única fuerza que realiza trabajo es la de gravedad **que es conservativa**:

$$E_{c_1} + E_{p_1} = E_{c_2} + E_{p_2}; E_{c_2} = E_{c_1} + E_{p_1} - E_{p_2} = E_{\text{Mec}1} - E_{p_2}; v = \sqrt{\frac{2(E_{\text{Mec}1} - E_{p_2})}{m}}$$

$$v = \sqrt{\frac{2(E_{\text{Mec}1} - E_{p_2})}{m}} = \sqrt{\frac{2(-7,48 \cdot 10^8 + 1,57 \cdot 10^9) \text{ J}}{25 \text{ kg}}} = 8109 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 8,1 \frac{\text{km}}{\text{s}} = 29 \cdot 160 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

(Oviedo. 2013-2014/ 6.1)

Un satélite artificial describe una órbita circular de  $2 R_T$ : en torno a la Tierra. Si en la superficie de la Tierra pesa 5000 N. Calcula:

- La velocidad orbital del satélite en su movimiento.
- El peso del satélite en órbita.

DATOS:  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$ ;  $R_T = 6370 \text{ km}$ ;  $g_0 = 9,8 \text{ m/s}^2$

**Solución:**

$$a) \left. \begin{aligned} v_o &= \sqrt{\frac{G M_T}{r}} \\ g_0 &= G \frac{M_T}{R_T^2}; G M_T = g_0 R_T^2 \end{aligned} \right\} v_o = \sqrt{\frac{g_0 R_T^2}{2 R_T}} = \sqrt{\frac{g_0 R_T}{2}}$$

$$v_o = \sqrt{\frac{g_0 R_T}{2}} = \sqrt{\frac{9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 6,370 \cdot 10^6 \text{ m}}{2}} = 5586 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 5,6 \frac{\text{km}}{\text{s}} = 20 \cdot 160 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

b) El valor de la gravedad a una altura  $h = 2 R_T$  será:

$$g = G \frac{M_T}{(R_T + h)^2} = G \frac{M_T}{(3 R_T)^2} = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N m}^2}{\text{kg}^2} \frac{5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{(3 \cdot 6,370 \cdot 10^6)^2 \text{ m}^2} = 2,46 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Comparando los pesos en la superficie de la Tierra y en la órbita:

$$\left. \begin{array}{l} P_h = m g \\ P_0 = m g_0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} P_h = \frac{g}{g_0} P_0 \\ P_h = P_0 \frac{g}{g_0} = 5000 \text{ N} \frac{2,46 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 1255 \text{ N} \end{array}$$

Oviedo. 2013-2014/ 5.1)

Un satélite tiene una masa  $m = 500 \text{ kg}$  y su órbita, supuesta circular, se encuentra a una distancia de  $2,32 \cdot 10^4 \text{ km}$  de la superficie terrestre. Determina:

- Las energías potencial y cinética del satélite en su órbita.
- El periodo del movimiento orbital.
- La energía mínima para ponerlo en órbita y la velocidad de escape de la misma.

DATOS:  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$ ;  $R_T = 6,38 \cdot 10^6 \text{ m}$ ;  $M_T = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$

**Solución:**

- a) Para una órbita circular la energía cinética es igual a la mitad del valor absoluto de la energía potencial:

$$r = R_T + h = (6,38 \cdot 10^6 + 2,32 \cdot 10^7) \text{ m} = 2,96 \cdot 10^7 \text{ m}$$

$$E_p = -G \frac{M_T m}{r} = -6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \frac{5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg} \cdot 500 \text{ kg}}{2,96 \cdot 10^7 \text{ m}} = -6,73 \cdot 10^9 \text{ J}$$

$$E_c = \frac{1}{2} |E_p| = \frac{1}{2} 6,73 \cdot 10^9 \text{ J} = 3,37 \cdot 10^9 \text{ J}$$

- b)  $r = R_T + h = (6,38 \cdot 10^6 + 2,32 \cdot 10^7) \text{ m} = 2,96 \cdot 10^7 \text{ m}$

$$T^2 = \left( \frac{4\pi^2}{GM_T} \right) r^3; T = \sqrt{\left( \frac{4\pi^2}{6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \cdot 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}} \right) (2,96 \cdot 10^7)^3 \text{ m}^3} = 50\,707 \text{ s} = 14 \text{ h } 5 \text{ min } 7 \text{ s}$$

- c) La energía para ponerlo en órbita (sin considerar pérdidas debido al rozamiento con la atmósfera) vendrá dada por la energía total de la órbita, que si se considera circular será la mitad de la energía potencial, menos la energía potencial que tiene en la superficie de la Tierra.

Energía total en la órbita:

$$E_2 = E_{\text{Tot}} = E_p + E_c = \frac{1}{2} E_p = \frac{1}{2} (-6,73 \cdot 10^9 \text{ J}) = -3,37 \cdot 10^9 \text{ J}$$

Energía potencial en la superficie de la Tierra:

$$E_1 = E_p = -G \frac{M_T m}{r} = -6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \frac{5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg} \cdot 500 \text{ kg}}{6,38 \cdot 10^6 \text{ m}} = -3,12 \cdot 10^{10} \text{ J}$$

Diferencia de energía (energía necesaria para ponerlo en la órbita):

$$\Delta E = E_2 - E_1 = (-3,37 \cdot 10^9 + 3,12 \cdot 10^{10}) \text{ J} = 2,78 \cdot 10^{10} \text{ J}$$

Velocidad de escape:

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{r}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \cdot 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{2,96 \cdot 10^7 \text{ m}}} = 5187 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 5,19 \frac{\text{km}}{\text{s}} = 18\,684 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Oviedo. 2013-2014/ 4.1)

Con ayuda de los datos que se facilitan determina el valor de la aceleración de la gravedad en la superficie de la Luna, a partir del valor de la misma en la superficie terrestre.

DATOS:  $M_L = 0,012 M_T$  ;  $R_L = 0,27 R_T$ ; aceleración gravedad en la superficie de la Tierra:  $g_0 = 9,8 \text{ m/s}^2$

**Solución:**

$$\left. \begin{aligned} g_0 &= G \frac{M_T}{R_T^2} \\ g_L &= G \frac{M_L}{R_L^2} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} g_L &= \frac{M_L R_T^2}{M_T R_L^2} = \frac{0,012 M_T \cancel{R_T^2}}{\cancel{M_T} 0,27^2 \cancel{R_T^2}}; g_L = g_0 \frac{0,012}{0,27^2} = 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} 0,162 = 1,6 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \end{aligned}$$

(Oviedo. 2013-2014/ 3.1)

Un cohete de 3500 kg de masa despegue de la superficie de la Tierra con una velocidad de 25 km/s.

- Calcula la energía mecánica total considerando que la energía potencial es cero a distancias muy largas y despreciando la fuerza de rozamiento debida a la atmósfera.
- Determina si el cohete escapará de la atracción gravitatoria terrestre y, en caso afirmativo, calcula la velocidad que tendrá el cohete cuando se encuentre muy lejos de la Tierra.

DATOS:  $g_0 = 9,8 \text{ m/s}^2$ ;  $R_T = 6370 \text{ km}$

**Solución:**

- La energía mecánica será la suma de la energía cinética más la potencial en la superficie de la Tierra:

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} 3500 \text{ kg} (2,5 \cdot 10^4)^2 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} = 1,1 \cdot 10^{12} \text{ J}$$

$$\left. \begin{aligned} E_p &= -G \frac{M_T m}{R_T} \\ g_0 &= G \frac{M_T}{R_T^2}; GM_T = g_0 R_T^2 \end{aligned} \right\} E_p = -\frac{g_0 R_T^2 m}{R_T} = -m g_0 R_T$$

$$E_p = -3500 \text{ kg} 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} 6,38 \cdot 10^6 \text{ m} = -2,2 \cdot 10^{11} \text{ J}$$

$$E_1 = E_c + E_p = (1,1 \cdot 10^{12} - 2,2 \cdot 10^{11}) \text{ J} = 8,8 \cdot 10^{11} \text{ J}$$

- Para que el cohete escape de la atracción gravitatoria terrestre habrá que comunicarle como mínimo la velocidad de escape dada por:

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{r}} = \sqrt{2 g_0 R_T} \sqrt{2 \cdot 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} 6,38 \cdot 10^6 \text{ m}} = 11182 \frac{\text{m}}{\text{s}} 11,2 \frac{\text{km}}{\text{s}} = 40320 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Como se le comunica una velocidad de 25 km/s, **dicha velocidad será suficiente para que escape de la atracción gravitatoria de la Tierra** y cuando esto suceda ( $E_p=0$ ), tendrá una velocidad que se puede calcular a partir de:

$$E_{c1} + E_{p1} = E_{c2} + E_{p2}; E_{c2} = E_{c1} + E_{p1} - E_{p2} = E_{c1} + E_{p1} - 0 = E_1$$

$$\frac{1}{2} m v^2 = E_1; v = \sqrt{\frac{2E_1}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 8,8 \cdot 10^{11} \text{ J}}{3500 \text{ kg}}} = 22424 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 22,4 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

(Oviedo. 2013-2014/ 2.1)

En la superficie de la Luna el periodo de un péndulo simple de 1 m de longitud es  $T=4,7$  s. Si el radio de la Luna es  $R_L=1738$  km., determina:

- El valor de la gravedad en la superficie lunar.
- La velocidad de escape de la superficie de la Luna.

**Solución:**

a) El valor del periodo de un péndulo simple viene dado por:  $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$

Por tanto:  $g = 4\pi^2 L = 4\pi^2 \frac{1\text{m}}{4,7^2\text{s}^2} = 1,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

b)  $v_e = \sqrt{\frac{2GM}{r}} = \sqrt{2g_L R_L} = \sqrt{2 \cdot 1,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 1,738 \cdot 10^6\text{m}} = 2501 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 2,5 \frac{\text{km}}{\text{s}} = 9000 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

(Oviedo. 2013-2014/ 1.1)

- Si la masa de la Luna es 1/81 la masa de la Tierra y su radio 3/11 el radio terrestre, determina el valor de  $g$  en la Luna.
- ¿Cuánto pesaría en la Luna un cuerpo de 70 kg de masa? ¿Cuál debe ser el valor de la masa de un cuerpo para que pese en la Luna 500 N?

DATOS: En la Tierra:  $g_0=9,8 \text{ m/s}^2$ **Solución:**

a) 
$$g_0 = G \frac{M_T}{R_T^2} \left\{ \begin{array}{l} g_L = \frac{M_L R_T^2}{M_T R_L^2} = \frac{1}{81} \frac{M_T R_T^2}{R_L^2} \\ g_0 = \frac{M_L R_T^2}{M_T R_L^2} = \frac{1}{81} \frac{M_T R_T^2}{\left(\frac{3}{11}\right)^2 R_T^2} \end{array} \right. ; g_L = g_0 \frac{11^2}{3^2 \cdot 81} = 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0,166 = 1,6 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$P_L = m g_L = 70 \text{ kg} \cdot 1,6 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 112 \text{ N}$$

$$P_L = m g_L ; m = \frac{P_L}{g_L} = \frac{500 \text{ N}}{1,6 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 312,5 \text{ kg}$$

(Oviedo. 2012-2013/ 8.1)

Considera un satélite artificial que da dos vueltas alrededor de la Tierra cada 24 h en una órbita circular.

- Calcula la altura a la que se encuentra sobre la superficie terrestre.
- Determina la velocidad del satélite

DATOS:  $G=6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$ ;  $R_T=6370 \text{ km}$ ;  $M_T=5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ **Solución:**

a)  $T^2 = \left( \frac{4\pi^2}{GM_T} \right) r^3 ; r = \sqrt[3]{\frac{GM_T T^2}{4\pi^2}} \quad (T=12 \text{ h} = 43200 \text{ s})$

$$r = \sqrt[3]{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \cdot 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg} \cdot (4,32 \cdot 10^4)^2 \text{ s}^2}{4\pi^2}} = 2,66 \cdot 10^7 \text{ m} = 26600 \text{ km}$$

$$r = h + R_T ; h = r - R_T = (26600 - 6370) \text{ km} = 20230 \text{ km}$$

b)  $v_o = \sqrt{\frac{GM}{r}} = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \cdot 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{2,66 \cdot 10^7 \text{ m}}} = 3869 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 3,9 \frac{\text{km}}{\text{s}} = 14040 \frac{\text{km}}{\text{h}}$



Oviedo. 2012-2013/ 7.1)

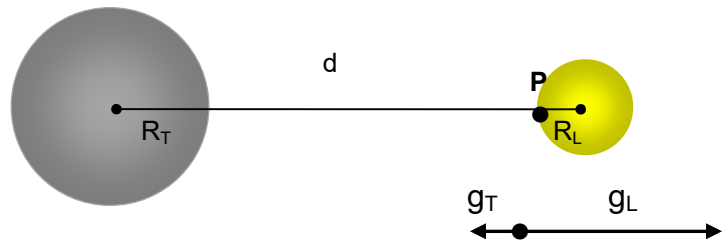
Considera la Tierra y la Luna como esferas de radio  $R_T = 6,4 \cdot 10^6$  m y  $R_L = 1,7 \cdot 10^6$  m, respectivamente y que la distancia entre los centros de la Tierra y la Luna sea  $d = 3,8 \cdot 10^8$  m.

- Compara en este caso el valor de la intensidad del campo gravitatorio creado por la Luna en un punto P de la superficie lunar con el valor del campo gravitatorio creado por la Tierra en ese mismo punto. Supón que el punto está situado en la línea que une el centro de la Luna con el de la Tierra.
- Comenta el resultado y, a la vista del mismo, indica si es lógico despreciar alguno de los valores calculados en el punto.

DATOS:  $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$  Nm<sup>2</sup>/kg<sup>2</sup>;  $M_T = 5,97 \cdot 10^{24}$  kg;  $M_L = 7,35 \cdot 10^{22}$  kg.

**Solución:**

- A la hora de hacer los cálculos hemos de tener en cuenta (ver dibujo) que la distancia entre la Tierra y el punto P es  $r = d - R_L$



$$\left. \begin{aligned} g_T &= G \frac{M_T}{r^2} \\ g_L &= G \frac{M_L}{R_L^2} \end{aligned} \right\} \left\{ \begin{aligned} g_T &= \frac{M_T R_L^2}{M_L r^2} = \frac{5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg} (1,7 \cdot 10^6)^2 \text{ m}^2}{7,35 \cdot 10^{22} \text{ kg} (3,8 \cdot 10^8)^2 \text{ m}^2} \\ g_L &= 1,6 \cdot 10^{-3} g_T \end{aligned} \right.$$

- Como resultado del cálculo podemos ver que el campo creado por la Tierra es de poco más de una milésima del creado por la Luna y, dado que los datos están dados con tres cifras significativas,, puede despreciarse sin cometer un error importante.

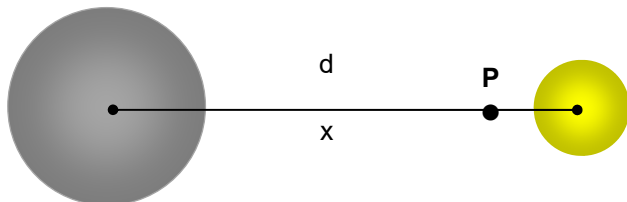
Oviedo. 2012-2013/ 6.1)

Determina razonablemente a qué distancia de la Tierra se cancela la fuerza total ejercida por la Luna y la Tierra sobre un cuerpo situado en la misma.

DATOS: La masa de la Tierra es aproximadamente 81 veces la de la Luna, es decir:  $M_T = 81 M_L$ ; distancia media Tierra-Luna  $d = 3,84 \cdot 10^8$  m.

**Solución:**

Debido a que la fuerza gravitatoria de la Tierra es mucho mayor que la de la Luna el punto buscado ha de estar más próximo a la Luna. Consideremos que el punto buscado está a una distancia x medida desde la Tierra (ver dibujo):



$$\left. \begin{aligned} F_T &= G \frac{m M_T}{x^2} \\ F_L &= G \frac{m M_L}{(d-x)^2} \end{aligned} \right\} G \frac{m M_T}{x^2} = G \frac{m M_L}{(d-x)^2}; \left( \frac{d-x}{x} \right)^2 = \frac{M_L}{M_T}; \frac{d-x}{x} = \sqrt{\frac{M_L}{M_T}} = \sqrt{\frac{1}{81}} = \frac{1}{9}$$

$$\frac{d-x}{x} = \frac{1}{9}; \boxed{x = \frac{9}{10} d} \quad x = \frac{9}{10} 3,84 \cdot 10^5 \text{ km} = 3,46 \cdot 10^5 \text{ km}$$

Oviedo. 2012-2013/ 5.1)

Una sonda espacial de 250 kg de masa se encuentra describiendo una órbita circular alrededor de la Luna a una altura de 180 km de su superficie. Calcula:

- La velocidad orbital de la sonda.
- El valor de su energía mecánica

DATOS:  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$ ;  $R_L = 1740 \text{ km}$ ;  $M_L = 7,4 \cdot 10^{22} \text{ kg}$ .

**Solución:**

$$a) \quad r = R_L + h = (1740 + 180) \text{ km} = 1920 \text{ km} = 1,92 \cdot 10^6 \text{ m}$$

$$v_o = \sqrt{\frac{GM}{r}} = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \cdot 7,4 \cdot 10^{22} \text{ kg}}{1,92 \cdot 10^6 \text{ m}}} = 1603 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 1,6 \frac{\text{km}}{\text{s}} = 5760 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

$$b) \quad E_{\text{mec}} = \frac{1}{2} E_p = -\frac{1}{2} \frac{GM_L m}{r} = -\frac{1}{2} \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \cdot 7,4 \cdot 10^{22} \text{ kg} \cdot 250 \text{ kg}}{1,92 \cdot 10^6 \text{ m}} = -3,2 \cdot 10^8 \text{ J}$$

Oviedo. 2012-2013/ 4.1)

Calcula el periodo de giro de la Luna en su movimiento circular alrededor de la Tierra.

DATOS:  $M_L = 7,35 \cdot 10^{22} \text{ kg}$ ;  $M_T = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ ; distancia media Tierra-Luna  $d = 3,84 \cdot 10^8 \text{ m}$ .

**Solución:**

$$T^2 = \left( \frac{4\pi^2}{GM_T} \right) r^3; T = \sqrt{\left( \frac{4\pi^2}{6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \cdot 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}} \right) (3,84 \cdot 10^8)^3 \text{ m}^3} = 2,37 \cdot 10^6 \text{ s} = 27,4 \text{ días}$$

Oviedo. 2012-2013/ 3.1)

Un satélite artificial de 500 kg de masa se lanza desde la superficie terrestre hasta situarlo en una órbita circular situada a una altura  $h = 1200 \text{ km}$  sobre la superficie de la Tierra. Determina:

- La intensidad del campo gravitatorio terrestre en cualquier punto de la órbita descrita por el satélite.
- La velocidad del satélite cuando se encuentre en dicha órbita.

DATOS:  $M_T = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ ;  $R_T = 6,40 \cdot 10^6 \text{ m}$ ;  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$

**Solución:**

$$a) \quad g = G \frac{M_T}{(R_T + h)^2} = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \frac{5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{(7,6 \cdot 10^6)^2 \text{ m}^2} = 6,89 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$b) \quad r = R_T + h = (6400 + 1200) \text{ km} = 7600 \text{ km} = 7,60 \cdot 10^6 \text{ m}$$

$$v_o = \sqrt{\frac{GM}{r}} = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \cdot 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{7,6 \cdot 10^6 \text{ m}}} = 7238 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 7,2 \frac{\text{km}}{\text{s}} = 25920 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Oviedo. 2012-2013/ 2.1)

Considera dos masas de 5000 kg y 3000 kg respectivamente, separadas una distancia de 8 m, Calcula:

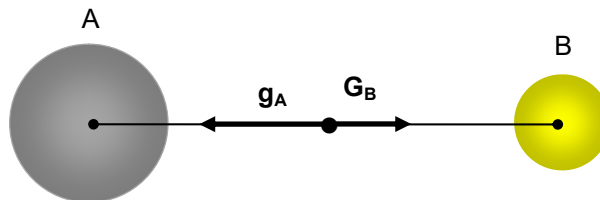
- El módulo de la fuerza de atracción entre ambas.
- El valor del campo gravitatorio total en el punto medio de la recta que las une.

DATOS:  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$

**Solución:**

$$a) \quad F = G \frac{M m}{r^2} = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N m}^2}{\text{kg}^2} \frac{5 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot 3 \cdot 10^3 \text{ kg}}{8^2 \text{ m}^2} = 1,56 \cdot 10^{-5} \text{ N}$$

b)



$$\left. \begin{array}{l} g_A = G \frac{M_A}{r^2} \\ g_B = G \frac{M_B}{r^2} \end{array} \right\} g_{\text{Tot}} = g_A - g_B = \frac{G}{r^2} (M_A - M_B) = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N m}^2}{\text{kg}^2}}{8^2 \text{ m}^2} (5000 - 3000) \text{ kg} = 8,34 \cdot 10^{-9} \frac{\text{N}}{\text{kg}}$$

Oviedo. 2012-2013/ 1.1)

Calcular razonadamente el valor de la intensidad del campo gravitatorio en la superficie de un planeta cuya masa es 5 veces la masa de la Tierra y su radio 4 veces el radio terrestre.

DATOS:  $g_0 = 9,8 \text{ N/kg}$

**Solución:**

$$\left. \begin{array}{l} g_0 = G \frac{M_T}{R_T^2} \\ g_P = G \frac{M_P}{R_P^2} \end{array} \right\} \frac{g_P}{g_0} = \frac{M_P R_T^2}{M_T R_P^2} = \frac{5 M_T R_T^2}{M_T 4^2 R_T^2} = \frac{5}{16}; \quad \boxed{g_P = \frac{5}{16} g_0}$$

$$g_P = \frac{5}{16} 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 3,1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$