| | | |
|---|---|---|
| | **INTERACCIÓN GRAVITACIONAL** | **IES La Magdalena. Avilés. Asturias** |

En el s. XVI **Nicolás Copérnico (1473 – 1543)** propuso una hipótesis revolucionaria para explicar el movimiento de los planetas: el Sol pasaba a ser el centro del sistema (lugar que hasta entonces había ocupado la Tierra) y los planetas se movían en órbitas circulares en torno suyo.

Casi un siglo después **Johannes Kepler (1571 – 1630)** tras un concienzudo análisis de miles de datos astronómicos recopilados por el astrónomo Tycho Brahe enunció las leyes del movimiento planetario (hoy conocidas como **Leyes de Kepler**)

## Leyes de Kepler

- **Primera Ley de Kepler (1609)**

*"Los planetas describen órbitas elípticas, estando el sol en uno de sus focos."*

- **Segunda Ley de Kepler (1609)**

*"El vector de posición de cualquier planeta con respecto del Sol (vector que tiene el origen en el Sol y su extremo en el planeta considerado) barre áreas iguales en tiempos iguales."*

En la figura (si se supone que t es el mismo): $A_1 = A_2$

De forma general: $\frac{A_1}{t} = \frac{A_2}{t}$ . El cociente $v_A = \frac{A}{t}$ mide la rapidez con que el radio vector barre el área A y se conoce como ***velocidad areolar,*** luego podemos enunciar la segunda ley de una forma alternativa diciendo que *"los planetas describen sus órbitas alrededor del Sol con velocidad areolar constante".*

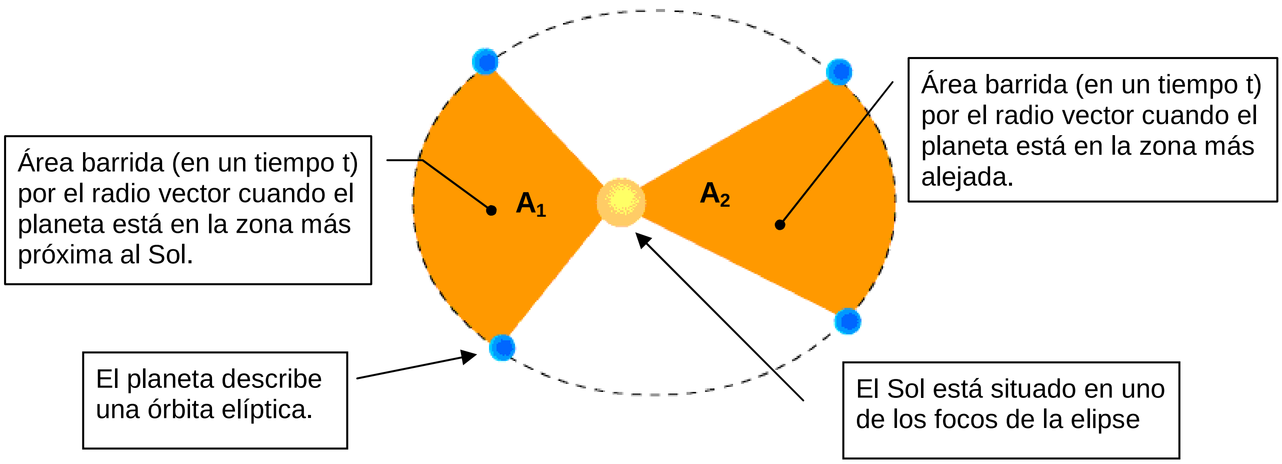
- **Tercera Ley de Kepler (1619)**

*"Los cuadrados de los periodos de revolución (T) son proporcionales a los cubos de las distancias promedio de los planetas al sol (r)."*

$$\boxed{T^2 = k\, r^3}$$

Donde ***k*** es una constante de proporcionalidad (constante de Kepler) que depende de la masa del astro central. Para el Sistema Solar: $k = 3.10^{-19}\ s^2/m^3$

***r*** coincide con el valor del ***semieje mayor*** para órbitas elípticas.



**¿Cuánto de elíptica?**

Aunque estrictamente la órbita descrita por la Tierra en su movimiento alrededor del Sol es una elipse, realmente se aproxima mucho a un círculo.

La excentricidad de la elipse para la órbita terrestre tiene un valor e = 0,017. Una excentricidad cero corresponde a un círculo. Cuanto más se aleje de cero más aplanada será la elipse. El valor máximo, 1, se correspondería con una recta.

La distancia de la Tierra al Sol en el punto más próximo (perihelio) es de 147 100 000 km.

La distancia de la Tierra al Sol en el punto más alejado (afelio) es de 152 100 000 km.

Aunque la diferencia (5 000 000 km) puede parecer considerable, en realidad se corresponde con un escaso 3 % de diferencia entre ambos valores.

**Ejemplo 1**

La Tierra orbita alrededor del Sol con un periodo de 365,25 días. Calcular la distancia media entre la Tierra y el Sol.

DATOS: La constante de Kepler para el Sistema Solar vale: $k = 3.10^{-19}\ s^2/m^3$

**Solución:**

Partimos de la tercera ley de Kepler: $T^2 = k\,r^3$ y despejamos la incógnita (r):

$$r=\sqrt[3]{\frac{T^2}{k}}=\sqrt[3]{\frac{\left(3,16.10^7\right)^2\cancel{s^2}}{3.10^{-19}\frac{\cancel{s^2}}{m^3}}}=1,49.10^{11}\,m=1,49.10^8\,km=149.10^6\,km$$

NOTA: La distancia media entre el Sol y la Tierra es de unos 150 millones de km (149 597 870 km) y es usada en astronomía como unidad para medir distancias. Se le da el nombre de ***unidad astronómica (ua).***

**Ejemplo 2**

Marte se encuentra situado a una distancia media del Sol de 1,52 ua. ¿Cuál es el periodo orbital de Marte alrededor del Sol?

DATOS: 1 ua = 150 .$10^6$ km; $k = 3.10^{-19}\ s^2/m^3$

**Solución:**

$$1,52\ \cancel{ua}\ \frac{1,50\ 10^{11} m}{1\ \cancel{ua}} = 2,28\ 10^{11} m$$

Partimos de la tercera ley de Kepler: $T^2 = k\,r^3$ y despejamos la incógnita (T):

$$T=\sqrt{k\,r^3}=\sqrt{3.10^{-19}\,\frac{s^2}{\cancel{m^3}}\left(2,28.10^{11}\right)^3\cancel{m^3}}=5,96.10^7\,s=690,2\ dias$$

NOTA: El periodo orbital para Marte ("año marciano") es de 686,98 días.

***Las leyes de Kepler son fenomenológicas.*** Es decir, se limitan a describir de manera cinemática cómo se mueven los planetas en sus órbitas alrededor del Sol, ***pero nada dicen acerca de las causas que provocan ese movimiento.***

Aunque las leyes fueron enunciadas inicialmente para el Sistema Solar son aplicables a cualquier objeto celeste que orbite alrededor de otro astro central.

Fue **Isaac Newton (1642 – 1727)** quien dio el siguiente gran paso en la explicación del movimiento planetario al enunciar su **Ley de Gravitación Universal** (formulada en 1666 y publicada en 1687)

**Ley de Gravitación Universal**

**"Los cuerpos se atraen con una fuerza directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que los separa."**

$$F = G \frac{m\, M}{d^2}$$

Masas de los cuerpos en kg

Fuerza de atracción gravitatoria. Si se consideran cuerpos grandes, la fuerza apunta hacia el centro de los mismos.

Distancia entre los cuerpos en metros. Si son cuerpos grandes, la distancia se toma entre los centros.

Constante de Gravitación Universal. Tiene el mismo valor para todo el Universo.
Para el S.I: $G = 6{,}67\, 10^{-11}\, \frac{N\, m^2}{kg^2}$

Debido a la pequeñez de la constante de gravitación la fuerza de gravedad sólo es apreciable entre cuerpos cuya masa sea muy grande (planetas, estrellas…)

De acuerdo con la expresión anterior dos masas de 100 y 1000 kg, situadas a 20 m de distancia se atraerán con un fuerza de:

$$F = G \frac{m\, M}{d^2} = 6{,}67\, 10^{-11} \frac{N\, \cancel{m^2}}{\cancel{kg^2}} \frac{100\, \cancel{kg}\; 1000\, \cancel{kg}}{20^2\, \cancel{m^2}} = 1{,}67\, 10^{-8}\, N$$

Fuerza prácticamente inmedible debido a su pequeñez.

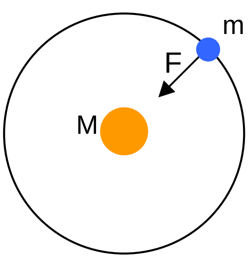
Sin embargo, la fuerza con que la Tierra ($6{,}0\, 10^{24}$ kg) atrae a un cuerpo de 50 kg situado en su superficie (distancia al centro de la Tierra $6{,}4\, 10^{6}$ m) valdrá:

$$F = G \frac{m\, M}{R^2} = 6{,}67\, 10^{-11} \frac{N\, \cancel{m^2}}{\cancel{kg^2}} \frac{50\, \cancel{kg}\; 6\, 10^{24}\, \cancel{kg}}{(6{,}4\, 10^{6})^2\, \cancel{m^2}} = 488{,}5\, N$$

Que es una fuerza apreciable ya que la masa de la Tierra es muy grande.

Si suponemos una órbita circular (lo cual no está muy alejado de la realidad) podemos combinar la Ley de Gravitación Universal con la dinámica del movimiento circular para obtener datos de la órbita. Por ejemplo, la aceleración centrípeta de la Tierra debida a su movimiento de traslación alrededor del Sol.

Datos: Masa del Sol: $1{,}98\, 10^{30}$ kg
Distancia (media) Tierra – Sol : $1{,}5\, 10^{12}$ m




$$\left.\begin{array}{l} F_c = m\, a_N \\ F = G \dfrac{m\, M}{d^2} \end{array}\right\} \quad \cancel{m}\, a_N = G \frac{\cancel{m}\, M}{d^2}\,; \quad a_N = G \frac{M}{d^2}$$

$$a_N = G \frac{M}{d^2} = 6{,}67\, 10^{-11} \frac{m^3}{\cancel{kg}\, s^2} \frac{1{,}98\, 10^{30}\, \cancel{kg}}{\left(1{,}5\, 10^{12}\right)^2 m^2} = 5{,}87\, 10^{-5}\, \frac{m}{s^2}$$

La Ley de Gravitación Universal representa un mayor nivel de profundización en la comprensión del universo que las leyes de Kepler. Estas son puramente descriptivas, dicen ***cómo se mueven los astros***, sin embargo la fuerza gravitatoria propuesta por Newton aparece como ***la causa*** que determina el movimiento de los objetos celestes.

- El propio Newton demostró (utilizando un procedimiento matemático inventado por él mismo, similar al cálculo diferencial y que denominó *método de fluxiones*) que si un cuerpo se mueve alrededor de otro por el que es atraído con una fuerza proporcional a sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia describiría una elipse, tal y como se postula en la primera ley de Kepler.
- La constancia de la velocidad areolar (segunda ley de Kepler) también es deducible (no se hace aquí, debido a los conceptos matemáticos implicados) a partir de la fuerza de atracción gravitatoria.
- La tercera ley de Kepler puede obtenerse teniendo en cuenta la expresión de la Ley de Gravitación Universal y considerando que los planetas describen su órbita con movimiento circular uniforme, sometidos a la fuerza de gravedad que apunta constantemente hacia el centro de la trayectoria (fuerza centrípeta)

$$\left.\begin{array}{l} F_c = m\,a_N = m\,\omega^2 d \\ F = G\,\dfrac{m\,M}{d^2} \end{array}\right\} G\,\frac{\cancel{m}\,M}{d^2} = \cancel{m}\,\omega^2\,d\ ;\ G\,M = \frac{(2\pi)^2}{T^2}\,d^3\ ;\ T^2 = \frac{4\,\pi^2\,d^3}{G\,M}\ ;\ T^2 = \left(\frac{4\,\pi^2}{G\,M}\right)d^3;\ \boxed{T^2 = k\,d^3}$$

Donde: $\boxed{k = \dfrac{4\,\pi^2}{G\,M}}$ Por tanto la constante de Kepler sólo depende del valor de la masa del astro central.

Para el Sistema Solar tendrá un valor (S.I): $k = \dfrac{4\,\pi^2}{G\,M} = \dfrac{4\,\pi^2}{6{,}67\,10^{-11}\,\dfrac{m^3}{\cancel{kg}\,s^2}\,1{,}98\,10^{30}\,\cancel{kg}} = 2{,}99\,10^{-19}\,\dfrac{s^2}{m^3}$

**Ejemplo 3**

Ío es una de las sesenta y tres lunas de Júpiter (la más próxima al planeta) y tiene un periodo orbital de 1 día 18 h y 28 min. ¿Cuál es la distancia media entre Ío y Júpiter?

DATOS: Masa de Júpiter: $1{,}90.10^{27}$ kg

**Solución:**

Expresamos el periodo orbital en segundos:

1 día 18 h y 28 min = 152 880 s

Partimos de la tercera ley de Kepler: $T^2 = k\,r^3$ y despejamos la incógnita (r): $r = \sqrt[3]{\dfrac{T^2}{k}}$

Hay que tener en cuenta que el astro central alrededor del cual orbita Ío es Júpiter, no el Sol. Por ***tanto deberemos determinar el valor de k para este caso sustituyendo la masa de Júpiter*** en la expresión que nos da la constante de Kepler (ver apuntes)

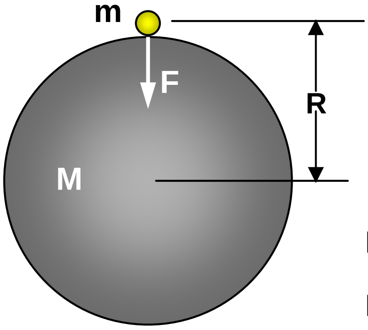
$$k = \frac{4\,\pi^2}{G\,M} = \frac{4\,\pi^2}{6{,}67\,10^{-11}\,\dfrac{m^3}{\cancel{kg}\,s^2}\,1{,}9010^{27}\,\cancel{kg}} = 3{,}12\,10^{-16}\,\frac{s^2}{m^3}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{T^2}{k}} = \sqrt[3]{\frac{\left(1{,}53.10^5\right)^2\,\cancel{s^2}}{3{,}12.10^{-16}\,\dfrac{\cancel{s^2}}{m^3}}} = 4{,}22.10^8\,m = 4{,}22.10^5\,km = 422\,000\ km$$

NOTA: El radio orbital medio de Ío alrededor de Júpiter se estima en 421 600 km

La Ley de Gravitación Universal nos permite explicar muchas cosas más, entre ellas el hecho de que todos los cuerpos caigan sometidos a la misma aceleración (9,81 m/s$^2$) con independencia de su masa.

Según la segunda ley de Newton los cuerpos aceleran en su caída porque son atraídos por la Tierra y llamamos peso a la fuerza con que el cuerpo es atraído. Si llamamos "g" al valor de la aceleración podemos calcular el peso de un cuerpo de masa m (fuerza con que es atraído por la Tierra): P = m g.




Si nos imaginamos ahora el mismo cuerpo situado sobre la superficie de la Tierra (ver figura), según lo visto más arriba será atraído hacia su centro con un fuerza (peso) dada por:

$$F = G\,\frac{m\;M}{R^2}$$

Por tanto:

$$\left.\begin{aligned} F &= G\,\frac{m\;M}{R^2} \\ P &= m\;g \end{aligned}\right\}\; P = F\;;\; \cancel{m}\;g = G\,\frac{\cancel{m}\;M}{R^2}\;;\;\boxed{g = G\,\frac{M}{R^2}}$$

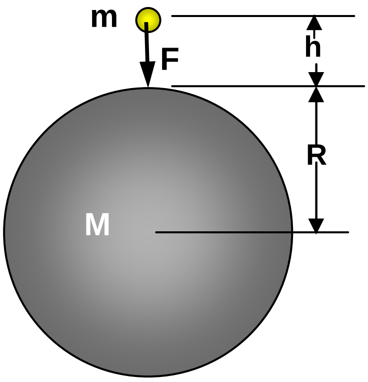
***Debido a que la fuerza de atracción gravitatoria es proporcional a la masa del objeto, el valor de la aceleración de la gravedad es independiente de la misma. Sólo depende de valores propios del planeta como son su masa y su radio***

Para la Tierra (M = 5,97 10 $^{24}$ kg y R = 6,37 10 $^{6}$ m):

$$g = 6{,}67\,10^{-11}\,\frac{m^{\cancel{3}}}{\cancel{kg}\;s^2}\,\frac{5{,}97\,10^{24}\;\cancel{kg}}{\left(6{,}37\,10^6\right)^2\;\cancel{m^2}} = 9{,}81\,\frac{m}{s^2}$$

***Rigurosamente el valor de g no es constante en todo el planeta,*** ya que prescindiendo de otros efectos (la rotación, por ejemplo, influye), el radio de la Tierra en el Ecuador es mayor que en los Polos, por tanto el valor de "g" aumenta del Ecuador a los Polos donde adquiere su valor más alto.

Si nos alejamos de la superficie terrestre el valor de la gravedad también variará, ya que entonces:




$$\boxed{g = G\,\frac{M}{(R+h)^2}}$$

Así para h = 30 km, tenemos:

$$g = G\,\frac{M}{(R+h)^2} = 6{,}67\,10^{-11}\,\frac{m^{\cancel{3}}}{\cancel{kg}\;s^2}\,\frac{6{,}0\,10^{24}\;\cancel{kg}}{\left(6{,}4\,10^6 + 3\,10^4\right)^2\;\cancel{m^2}} = 9{,}68\,\frac{m}{s^2}$$

Como se puede observar en el cálculo, la variación de la gravedad con la altura no es grande si se consideran alturas pequeñas comparadas con el valor del radio terrestre (6,37.10$^{6}$ m). En estos casos no se comete un error apreciable al considerar "g" como constante. Efectivamente, llamando $\mathbf{g_0}$ al valor de la gravedad en la superficie de la Tierra, tenemos:

$$g_0 = G\,\frac{M}{R^2}$$

$$g = G\,\frac{M}{(R+h)^2} = G\,\frac{M}{R^2}\,\frac{R^2}{(R+h)^2} = g_0\,\frac{R^2}{(R+h)^2} \approx g_0 \quad \text{Si}: h << R$$

**Ejemplo 5**

Calcular el valor de la aceleración de la gravedad en Mercurio sabiendo que tiene una masa de 3,30 $10^{23}$ kg y un radio de 2440 km

**Solución:**

El valor de la aceleración de la gravedad en un planeta depende de la masa y radio del planeta, y se puede calcular a partir de la expresión (ver más arriba):

$$g = G\,\frac{M}{R^2}$$

Sustituyendo los datos y operando:

$$g = G\,\frac{M}{R^2} = 6{,}67\,10^{-11}\,\frac{m^{\cancel{3}}}{\cancel{kg}\,s^2}\,\frac{3{,}30\,10^{23}\,\cancel{kg}}{\left(2{,}44\,10^6\right)^2\,\cancel{m^2}} = 3{,}70\,\frac{m}{s^2}$$

**Ejemplo 6**

El valor de la gravedad varía si nos alejamos de la superficie terrestre. Calcular a qué altura deberemos situarnos de la superficie de la Tierra para que g = 5 m/s$^2$

DATOS: Considerar g = 10 m/s$^2$ como valor en la superficie.

Masa de la Tierra: 6,0.$10^{24}$ kg. Radio de la Tierra: 6400 km.

**Solución:**

El valor de la gravedad para un punto situado a una altura h sobre la superficie terrestre viene dado por:

$$g = G\,\frac{M}{\left(R+h\right)^2}$$

Despejamos (R+h)$^2$ y, posteriormente restamos el valor de R (en km) según se puede ver a continuación:

$$\left(R+h\right)^2 = G\,\frac{M}{g} = 6{,}67\,10^{-11}\,\frac{m^{\cancel{3}\,2}}{\cancel{kg}\,\cancel{s^2}}\,\frac{6{,}0\,10^{24}\,\cancel{kg}}{5\,\frac{\cancel{m}}{\cancel{s^2}}} = 8{,}0\,10^{13}\,m^2$$

$$\left(R+h\right)^2 = 8{,}0\,10^{13}\,m^2\,;R+h = \sqrt{8{,}0\,10^{13}\,m^2} = 8{,}94\,10^6\,m = 8{,}94\,10^3\,km = 8\,940\,km$$

$$R+h = 8\,940\,km\,;\; h = 8\,940 - R;\; h = 8\,940\,km - 6\,400\,km = 2\,540\,km$$