	MOVIMIENTO RECTILÍNEO Y UNIFORMEMENTE ACELERADO	I.E.S La Magdalena. Avilés. Asturias

Vamos a considerar ahora movimientos en los que ***su velocidad varíe.*** Lo primero que necesitamos conocer es ***cómo varía la velocidad con el tiempo***. De todos los movimientos variados hay uno, singularmente importante, en el que ***la velocidad varía de forma uniforme con el tiempo***. Esto es, ***la velocidad varía (aumentando o disminuyendo) siempre lo mismo en un segundo***. Este tipo de movimiento se denomina ***movimiento uniformemente acelerado.***

Fíjate en la tabla de la derecha, en ella se puede observar que la velocidad varía de manera uniforme: ***aumenta diez unidades cada segundo.***

La aceleración mide, precisamente, la tasa de variación de la velocidad, o lo que es lo mismo, la rapidez con que varía la velocidad.

En el ejemplo propuesto la velocidad aumenta 10 m/s cada segundo. ***El valor de la aceleración para este caso será de 10 m/s²***

Podemos calcular la aceleración de la forma siguiente:

$$a = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Incremento de v

Incremento de t

El numerador de la expresión anterior calcula lo que varía la velocidad (se le llama "incremento" de v). El denominador calcula el tiempo transcurrido (se le denomina "incremento" de t).

Tiempo (s)	Velocidad (m/s)
0,00	0,00
1,00	10,00
2,00	20,00
3,00	30,00
4,00	40,00
5,00	50,00
6,00	60,00
7,00	70,00
8,00	80,00
9,00	90,00
10,00	100,00

Para el ejemplo anterior se puede calcular la aceleración de la siguiente manera:

- Para t = 0,00 (momento en el que se empieza a contar el tiempo) la velocidad es nula, y en el instante t = 1,00 s la velocidad vale 10,00 m/s, luego:

$$a = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{(10-0)\frac{m}{s}}{(1-0)\,s} = 10\,\frac{m}{s^2}$$

- Podemos hacer el cálculo entre los instantes t = 2,00 s y t = 8,00 s. En este caso:

$$a = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{(80-20)\frac{m}{s}}{(8-2)\,s} = 10\,\frac{m}{s^2}$$

Si repetimos el cálculo para dos instantes cualesquiera nos saldría lo mismo. La aceleración es constante y vale 10 m/s², ***lo que significa que la velocidad aumenta diez unidades (10 m/s) cada segundo.***

La aceleración es un vector, que puede apuntar en la misma dirección que la velocidad, o en sentido contrario.

Cuando usemos ecuaciones indicaremos el sentido del vector mediante el signo + ó - (ver ejemplos en las páginas siguientes)

MOVIMIENTO RECTILÍNEO Y UNIFORMEMENTE ACELERADO (MRUA)

> La trayectoria es una recta
> La aceleración es constante

La aceleración mide la rapidez con la que varía la velocidad.

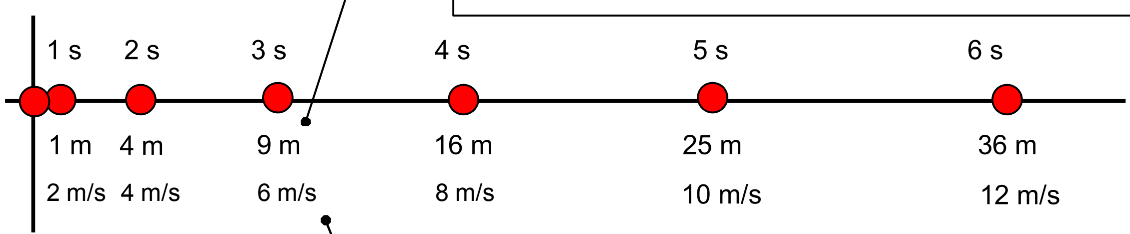
Se mide en m/s^2. Así una aceleración de 5 m/s^2 indica que la velocidad aumenta a razón de 5 m/s cada segundo.

Ecuaciones:

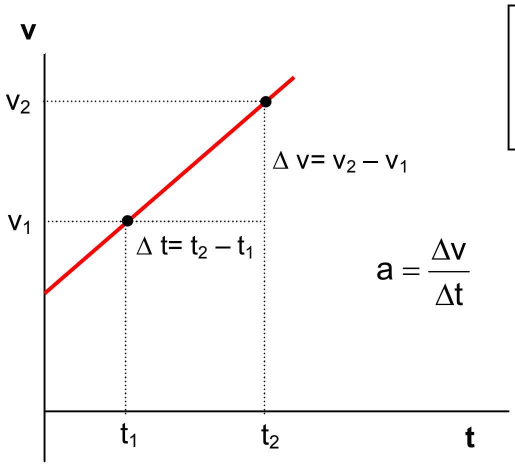
$$v = v_0 + a\,t$$
$$s = s_0 + v_0\,t + \tfrac{1}{2}\,a\,t^2$$

Donde:
v_0 = velocidad cuando t =0
s_0 = distancia al origen cuando t =0
s = distancia al origen (puede que no coincida con el espacio recorrido)
t = 0, significa *cuando empieza a contarse el tiempo* o *cuando se aprieta el cronómetro*

Observa que en el mismo intervalo de tiempo (1 s) cada vez recorre más espacio, ya que la velocidad va aumentando.



La velocidad aumenta siempre lo mismo en 1 s. La aceleración es constante. La velocidad aumenta linealmente con el tiempo.

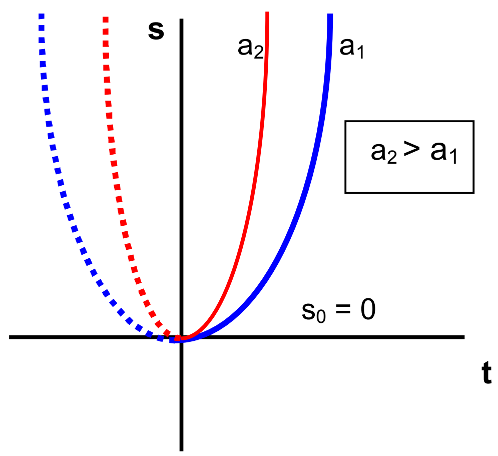


$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

La gráfica v - t es una recta. La inclinación de la recta depende de la aceleración.
Para calcular v_0 determinar el punto de corte de la recta con el eje "v"

Para calcular la aceleración del movimiento, calcular la pendiente de la recta

La gráfica s/t es una parábola.
La aceleración es positiva si la parábola se abre hacia arriba y negativa si lo hace hacia abajo.
Cuanto más cerrada sea la parábola, mayor aceleración
El desplazamiento inicial s_0 se determina viendo el punto de corte con el eje "s"



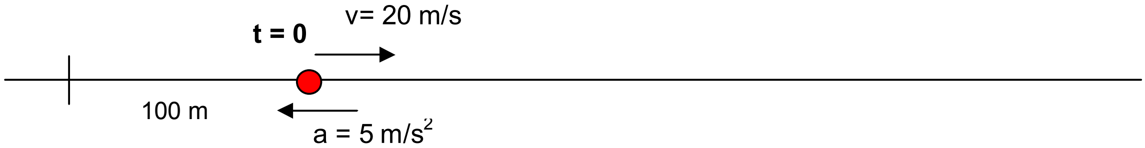
Para escribir las ecuaciones de un movimiento rectilíneo y uniformemente acelerado:

- ☑ Fija el origen a partir del cual se va a medir la distancia.
- ☑ Fija el sentido al que se le asigna signo positivo
- ☑ Determina el valor de las constantes del movimiento: **a, s_0 , v_0**
- ☑ Adapta las ecuaciones generales al caso particular sustituyendo los valores de **a, s_0 , v_0** para el caso considerado.

> Ten en cuenta que aunque no usemos los elementos matemáticos las magnitudes que estás usando: distancia al origen, velocidad, aceleración, son lo que se llaman **vectores** (muy a menudo los vectores se representan por flechas). Los vectores además de un valor (el número) tienen una dirección y un sentido. Pues bien, el signo nos indica el sentido del vector (hacia adonde apunta la flecha)

Ejemplo 1.

Escribe las ecuaciones que describen el movimiento del punto de la figura



Solución:

Ecuaciones generales para el movimiento:

$$v = v_0 + a\,t$$
$$s = s_0 + v_0\,t + ½\,a\,t^2$$

Se toma como origen de distancias la línea vertical.

Sentido positivo hacia la derecha.

Determinación de s_0: ¿ A qué distancia del origen está el punto cuando t =0? s_0 = 100 m

Determinación de v_0: ¿Cuál es la velocidad del punto cuando t =0? v_0 = 20 m/s

Determinación de la aceleración: a = **-** 5 m/s^2 (signo menos, ya que apunta hacia la izquierda).

Ecuaciones particulares para este movimiento:

$$v = 20 - 5\,t$$
$$s = 100 + 20\,t - 2{,}5\,t^2$$

Una vez escritas las ecuaciones se pueden resolver prácticamente todas las cuestiones que se quieran plantear. Solamente hay que *traducir* de nuestro lenguaje al *lenguaje de la ecuación* que solamente sabe de valores de s, v ó t.

Ejemplos: ¿Cuánto tarda en frenar el punto del ejemplo anterior?.

Traducción al *lenguaje ecuación*: ¿Qué valor toma t cuando v =0?

Si v = 0 ; 0 = 20 – 5 t ;

$$\boxed{t = \frac{20}{5} = 4\ \text{s}}$$

¿Cuál es su velocidad al cabo de 5,3 s?

Traducción *al lenguaje ecuación:* ¿Qué valor toma v cuando t = 5,3 s?

Si t = 5,3 s ; v = 20 – 5 . 5,3 = - 6,5 m /s (el signo menos indica que se desplaza hacia la izquierda. Después de frenar ha dado la vuelta)

Ejemplo 2

Un cuerpo parte del reposo y comienza a moverse. Los datos tomados se recogen en la tabla adjunta. Indicar qué tipo de movimiento tiene y determinar las ecuaciones para el mismo.

t(s)	s (m)
0	10
1	13
2	22
3	37
4	58
5	85

Solución:

Como se observa en la tabla adjunta el espacio recorrido no varía linealmente con el tiempo. Esto es: en el intervalo de un segundo recorre cada vez más espacio. Esto indica que su velocidad va aumentando. Si se trata de un movimiento uniformemente acelerado el aumento de velocidad, o lo que es lo mismo, **su aceleración, será constante** .

Si el movimiento es uniformemente acelerado deberá cumplir la ecuación: $s = s_0 + v_0\, t + ½\, a\, t^2$.

Como en este caso $v_0 = 0$, la ecuación quedará: $s = s_0 + ½\, a\, t^2$.

Despejando a : $\frac{1}{2} a\, t^2 = s - s_0\,;\; a = \frac{2(s - s_0)}{t^2}$

Usando la ecuación anterior vamos probando con datos correspondientes de *t* y *s* comprobamos si el valor de *a* es constante:

$$a = \frac{2\,(13-10)\,m}{1^2\,s^2} = 6\,\frac{m}{s^2} \qquad a = \frac{2\,(22-10)\,m}{2^2\,s^2} = 6\,\frac{m}{s^2} \qquad a = \frac{2\,(37-10)\,m}{3^2\,s^2} = 6\,\frac{m}{s^2}$$

Por tanto estamos ante un movimiento uniformemente acelerado con $a = 6\,\frac{m}{s^2}$

Para obtener las ecuaciones determinamos el valor de v_0 y s_0 :

$v_0 = 0$, ya que nos lo dicen en el enunciado

$s_0 = 10$ m, ya que es el valor de s cuando t = 0 (ver tabla).

Ecuaciones: $\boxed{v = 6\,t \qquad s = 10 + 3\,t^2}$

Los cuerpos cuando son lanzados al aire o caen libremente, están sometidos a una aceleración constante de 9,8 m/s^2 (que por simplicidad aproximaremos a 10,0 m/s^2), y que apunta hacia abajo (aceleración de la gravedad), y llevan un movimiento uniformemente acelerado.

Ejemplo 3

Una piedra es lanzada verticalmente y hacia arriba con una velocidad de 15 m/s. Determinar:

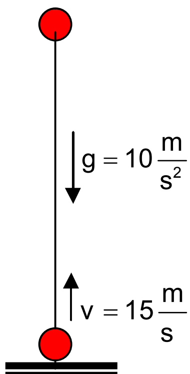
a) Ecuaciones del movimiento.

b) Altura máxima alcanzada.

c) Valor de la velocidad cuando t = 0,8 s y t = 2,3 s. Comentar

Solución:

Esquema:



Origen : el suelo (punto de lanzamiento)

Sentido positivo : hacia arriba

Determinación de v_0: ¿Cuál es la velocidad cuando t = 0? El tiempo empieza a contar cuando la piedra sale de la mano. Luego $v_0 = 15$ m/s

Determinación de s_0: ¿A qué distancia del origen está la piedra cuando t =0? Cuando se lanza la piedra está en el punto de lanzamiento (origen). Luego $s_0 = 0$

Determinación del valor de a : a = g = - 10 m /s^2. El signo menos se debe a que la aceleración apunta hacia abajo y hemos considerado sentido positivo hacia arriba.

a) Ecuaciones: $\boxed{\begin{array}{l} v = 15 - 10\,t \\ s = 15\,t - 5\,t^2 \end{array}}$

b) ¿Cuál es la altura máxima alcanzada?

Traducción al *lenguaje ecuación:* ¿Para qué valor de t, v = 0? (ya que en el punto de altura máxima la piedra se detiene durante un instante)

Si v = 0 ; 0 = 15 – 10 t ; $t = \frac{15}{10} = 1{,}5$ s . Tiempo que tarda en alcanzar la altura máxima

Para calcular la altura máxima alcanzada calculamos la distancia a la que se encuentra del origen cuando t = 1,5 s:

$s = h_{max} = 15 \,.\, 1{,}5 - 5 \,.\, 1{,}5^2 = 11{,}25$ m.

c) Valores de la velocidad:

$v_{(t = 0{,}8)} = 15 - 10 \,.\, 0{,}8 = 7$ m/s

$v_{(t = 2{,}3)} = 15 - 10 \,.\, 2{,}3 = -8$ m/s

Como se puede observar al cabo de 0,8 s del lanzamiento la piedra aún está en la fase ascendente, ya que el signo de la velocidad es positivo (sentido positivo: hacia arriba). Como se ve su velocidad va disminuyendo, debido a que durante el tramo de ascenso la aceleración lleva sentido contrario a la velocidad (movimiento decelerado)

Al cabo de 2,3 s la piedra se mueve hacia abajo. El signo es negativo: sentido hacia abajo. Efectivamente, a los 1,5 s alcanza la altura máxima y como la aceleración continúa actuando, comienza su carrera de descenso, pero esta vez al tener el mismo sentido aceleración y velocidad, ésta aumenta.

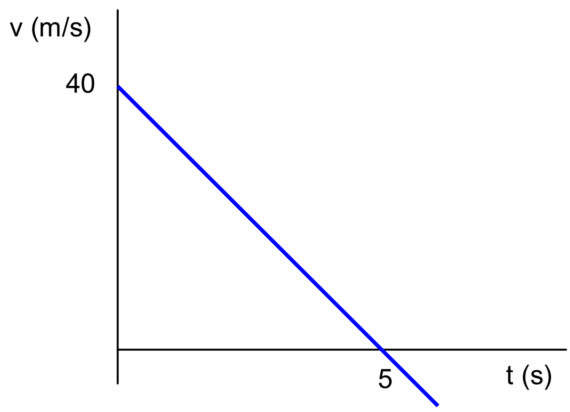
Ejemplo 4.

La gráfica de la izquierda se ha obtenido tras estudiar el movimiento de un cuerpo.

a) ¿Qué tipo de movimiento tiene?

b) ¿Cuáles son sus ecuaciones?

c) ¿Qué sucede para t = 5 s?



a) La gráfica v – t es una recta con pendiente negativa. Esto nos indica que la velocidad disminuye con el tiempo pero de forma lineal (la misma cantidad en 1 s). Luego el movimiento es uniformemente acelerado (con aceleración negativa. También se llama decelerado). Para calcular la aceleración (deceleración) calculamos la pendiente de la recta v – t:

$$\text{Pendiente} = a = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{(0-40)\,\frac{m}{s}}{(5-0)\,s} = -8\,\frac{m}{s^2}$$

Observa los valores tomados: $t_1 = 0$ $v_1 = 40$; $t_2 = 5$ $v_2 = 0$

b) Como no nos dan datos, podemos tomar para s_0 cualquier valor. Tomaremos $s_0 = 0$

$v_0 = 40$ m/s (leído en la gráfica)

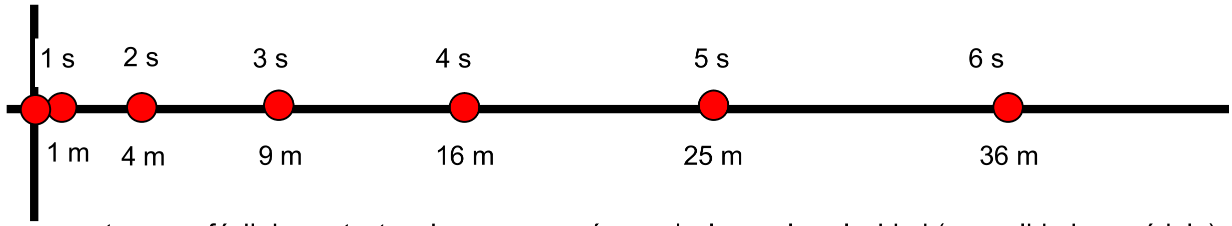
$a = -8$ m/s^2 (calculado)

Ecuaciones: $\boxed{v = 40 - 8\,t \,;\; s = 40\,t - 4\,t^2}$

c) En la gráfica se puede leer que cuando t = 5 s, v = 0. Luego al cabo de 5 s se detiene (es un movimiento decelerado). Si t es mayor de 5 s, observa que la línea en la gráfica v – t rebasa el eje horizontal empezando la velocidad (valores del eje Y) a tomar valores negativos ¿cómo interpretas esto?

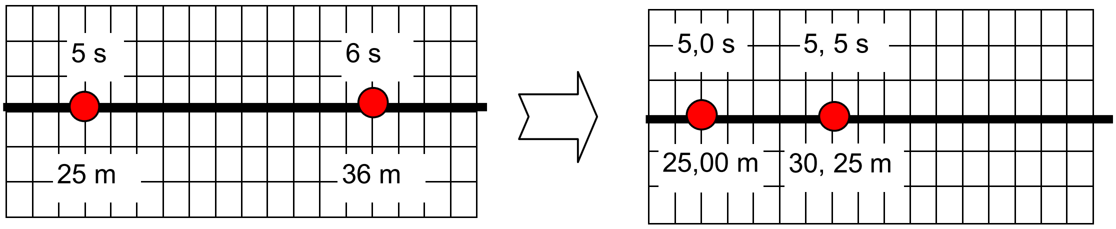
CONCEPTO DE VELOCIDAD INSTANTÁNEA

Si consideramos un cuerpo que se mueve con velocidad variable ¿Cómo podemos calcular el valor de la velocidad en un instante determinado (por ejemplo para t =5 s)?



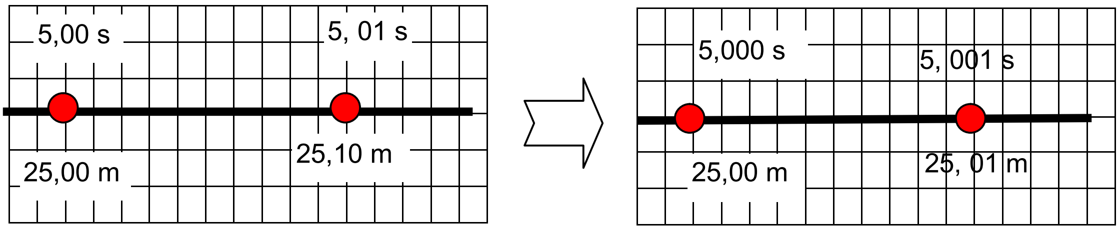
La pregunta no es fácil de contestar si pensamos cómo calculamos la velocidad (en realidad su módulo):

Observamos el móvil durante cierto tiempo y dividimos el espacio recorrido entre el tiempo que ha tardado en recorrerlo. Esto implica que hemos de tomar un intervalo de tiempo (por ejemplo: 1 s), pero como su velocidad varía, lo que realmente estamos calculando será la velocidad media entre el instante t = 5,0 y t = 6,0 s. Esto es, la velocidad constante a la que debe moverse el móvil para recorrer el espacio considerado en el mismo tiempo.



$$v_m = \frac{(36-25)\,m}{1\,s} = 11\,\frac{m}{s} \qquad v_m = \frac{(30,25-25,00)\,m}{0,50\ s} = 10,50\,\frac{m}{s}$$

¿Qué ocurrirá si hacemos más pequeño el intervalo de tiempo? Seguiremos calculando una velocidad media, pero el resultado se aproximará más al valor buscado.



$$v_m = \frac{(25,10-25,00)\,m}{0,01\,s} = 10,01\,\frac{m}{s} \qquad v_m = \frac{(25,01-25,00)\,m}{0,001\,s} = 10,001\,\frac{m}{s}$$

Podemos reiterar el procedimiento e ir estrechando cada vez más el intervalo de tiempo. De esta manera **vamos obteniendo el valor de la velocidad media entre dos puntos que están cada vez más próximos** y, en consecuencia, el valor obtenido se irá aproximando más y más al que la velocidad tendría en el instante t = 5 s.

¿Qué ocurriría si lográsemos calcular esta velocidad media entre dos puntos infinitamente próximos? Entonces obtendríamos la velocidad en el instante t = 5 s, con un error infinitamente pequeño (infinitesimal). Esto se puede lograr mediante un procedimiento matemático denominado "paso al límite", que forma parte del llamado cálculo infinitesimal.

Velocidad instantánea (módulo):

$$\boxed{v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}}$$

Se lee: *"límite de incremento de s, dividido por incremento de t, cuando incremento de t tiende a cero"* o (segunda igualdad) *"derivada de s respecto de t"*.