

Física Moderna
Teoría de la Relatividad Especial

IES La Magdalena.
Avilés. Asturias

NOTA

Algunos de los conceptos y razonamientos recogidos en este tema tienen por fuente el libro **Construyendo la relatividad de M.F. Alonso y Vicent F. Soler**, cuya lectura se recomienda a quienes deseen un conocimiento más profundo de la teoría.

Velocidad de la luz y Principio de Relatividad

La primera mención de lo que hoy conocemos como **Principio de Relatividad** se debe a Galileo, quien en su obra *Diálogo sobre los dos sistemas del mundo* (1632), señala la **imposibilidad de distinguir entre sistemas en reposo o con movimiento rectilíneo y uniforme**:

"Encerraos con un amigo en la cabina principal bajo la cubierta de un barco grande, y llevad con vosotros moscas, mariposas, y otros pequeños animales voladores ... colgad una botella que se vacíe gota a gota en un amplio recipiente colocado por debajo de la misma ... haced que el barco vaya con la velocidad que queráis, siempre que el movimiento sea uniforme y no haya fluctuaciones en un sentido u otro. ... Las gotas caerán ... en el recipiente inferior sin desviarse a la popa, aunque el barco haya avanzado mientras las gotas están en el aire... las mariposas y las moscas seguirán su vuelo por igual hacia cada lado, y no sucederá que se concentren en la popa..."

Galileo Galilei

Una consecuencia de lo expuesto es que **el movimiento es siempre relativo. Sólo podemos afirmar que un cuerpo se mueve o permanece en reposo respecto del sistema de referencia tomado**. La forma en que se mueve también dependerá del sistema elegido.

La mecánica de Newton cumple con el principio de relatividad, ya que según la Primera Ley o Principio de Inercia:

Si sobre un cuerpo no actúa ninguna fuerza, o todas las que actúan se compensan dando una resultante nula, **el cuerpo no variará su velocidad**. Esto es: si está en reposo, permanece en reposo; si se mueve, lo hará con movimiento rectilíneo y uniforme ($v = \text{cte}$)

Una consecuencia de la primera ley de Newton es que **reposo y movimiento rectilíneo y uniforme son estados de equilibrio del cuerpo (sobre el cuerpo no actúa fuerza neta alguna) y son físicamente equivalentes (sistemas de referencia inerciales)**.

Como todos los sistemas de referencia inerciales (SRI) son mecánicamente equivalentes, las leyes de Newton tienen la misma forma en todos ellos. Por tanto podemos reformular el Principio de Relatividad en la forma:

Es imposible determinar, mediante un experimento de tipo mecánico, si un sistema está en reposo o moviéndose con movimiento rectilíneo y uniforme.

A pesar de que el principio de relatividad parecía firmemente asentado entre las leyes de la Física, los descubrimientos realizados sobre electromagnetismo en la segunda mitad del s. XIX parecía que ponían en peligro la extensión de este principio más allá de los dominios de la mecánica.

Según las ecuaciones obtenidas por Maxwell la luz era una onda electromagnética que se propagaba con una velocidad que dependía de las características del medio (permitividad y permeabilidad). Lo realmente extraño de las nuevas ondas era que, aparentemente, no necesitaban medio alguno para propagarse, cosa que en la época era difícilmente asimilable. Todas las ondas conocidas hasta entonces (ondas mecánicas) necesitaban de un medio que propagara la perturbación. La luz, en consecuencia, se propagaría también en un medio que llenaba el universo entero y al que se le dio el nombre de **éter lumínico**. **La velocidad de propagación respecto del éter sería:**

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{N} \cdot \text{s}^2}{\text{C}^2}}} = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

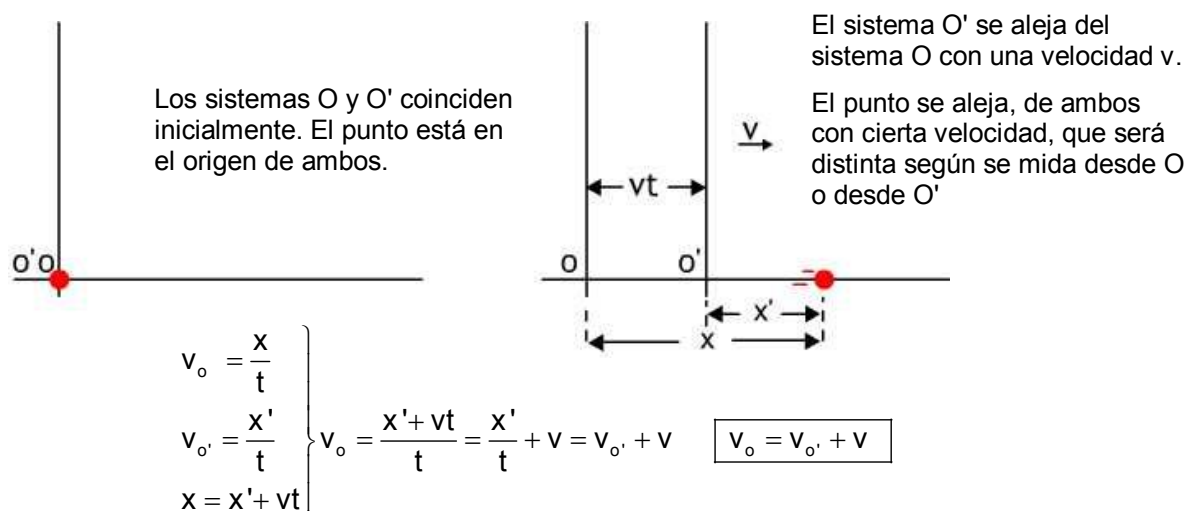
El elevado valor de la velocidad de la luz hacía del misterioso éter una sustancia con propiedades poco comunes:

- Debería de tener una rigidez superior a la del acero.
- Debería de ser extremadamente tenue, ya que los planetas, por ejemplo, se mueven a través de él sin modificar su velocidad apreciablemente.

Lo esencial era que la luz tenía una velocidad determinada (300 000 km/s) respecto del éter, lo que llevaba a plantear cuestiones básicas para la Física, pues considerando un sistema anclado en el éter, la velocidad de la luz dependía del movimiento relativo fuente-observador y el principio de relatividad dejaba de ser válido. Veamos por qué:

Si suponemos un sistema de referencia situado en el éter, **podríamos detectar si un sistema se mueve o no respecto de él**. Tendríamos, por tanto, un **sistema de referencia privilegiado** y, mediante un experimento (de tipo óptico), **podría detectarse el reposo o movimiento (absoluto), violándose de esta manera el principio de relatividad. El éter jugaba el papel de un sistema de referencia absoluto** respecto del cual podemos afirmar (de manera absoluta) si estamos en reposo o moviéndonos con velocidad constante.

Según la física clásica las velocidades de un punto (ver figura) medidas desde un sistema en reposo (sistema O) y uno que se mueve con velocidad v (sistema O') están relacionadas por la expresión



Luego la velocidad del punto medida desde el sistema en movimiento (O') será:

Cuando el punto se mueva acercándose a los sistemas de referencia, tendremos: $v_o, v_{o'}, v_o, v_{o'}, v_o, v_{o'}$

NOTA: Aunque aquí se ha deducido la expresión anterior para un desplazamiento del observador en la misma dirección que el punto, puede demostrarse que su análoga vectorial $\vec{v}_o = \vec{v}_{o'} + \vec{v}$ puede utilizarse para desplazamientos en cualquier dirección.

Supongamos ahora un vagón de tren (en reposo) y dos observadores, uno situado en el interior, y otro (mujer), en el exterior, que mide desde el sistema de referencia anclado en el éter (fijo). Imaginemos que ahora se emite un fotón (círculo rojo) desde uno de sus extremos. Ambos observadores miden idéntica velocidad:

$$v = \frac{L}{t} = 300\,000 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

Si consideramos ahora al vagón moviéndose hacia la derecha con velocidad v , el observador situado en su interior obtendrá que para recorrer el mismo espacio (L), la luz emplea ahora un tiempo t' (mayor que t , el medido cuando estaba en reposo). Luego obtendrá para la velocidad de la luz un valor:

$$c' = \frac{L}{t'} \quad \text{pero como } t' > t \quad c' < c$$

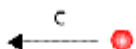
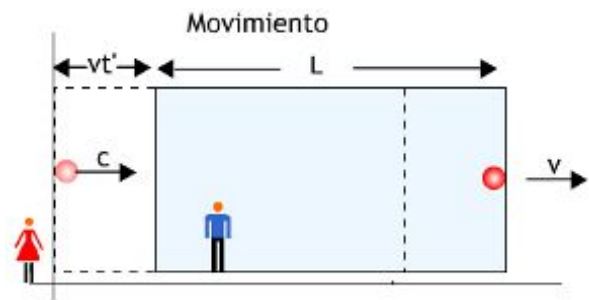
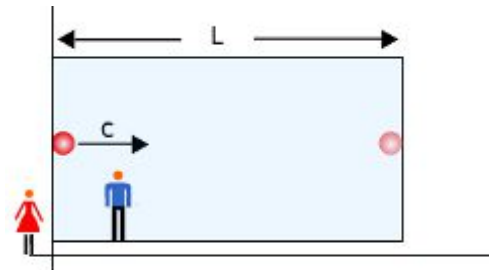
Así que con un simple experimento de tipo óptico (medir la velocidad de la luz) el observador podría determinar si está en reposo o en movimiento, lo que invalida el principio de relatividad

Lógicamente el observador situado en reposo sigue midiendo el mismo valor, ya que aunque la luz tarde más en llegar a la pared opuesta del vagón recorre también un mayor espacio:

$$c = \frac{L + vt'}{t'} = c' + v$$

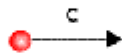
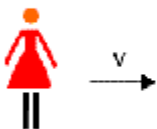
Expresión que coincide con lo predicho por la física clásica (ver más arriba).

El encontrar que la velocidad de la luz era distinta si se medía en reposo o en movimiento respecto de la fuente era equivalente a detectar el llamado **"viento del éter"**, ya que el efecto es similar a cuando se corre a favor o en contra del viento.



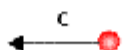
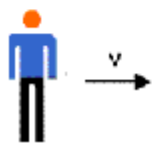
$$C_{\text{Obs}} = c$$

Observador **en reposo** respecto de la fuente luminosa (sin "viento de éter").
Mide una velocidad igual a c .



$$C_{\text{Obs}} = c - v$$

Observador **acercándose** a la fuente luminosa ("viento de éter" a favor).
Mide una velocidad igual a $c - v$.

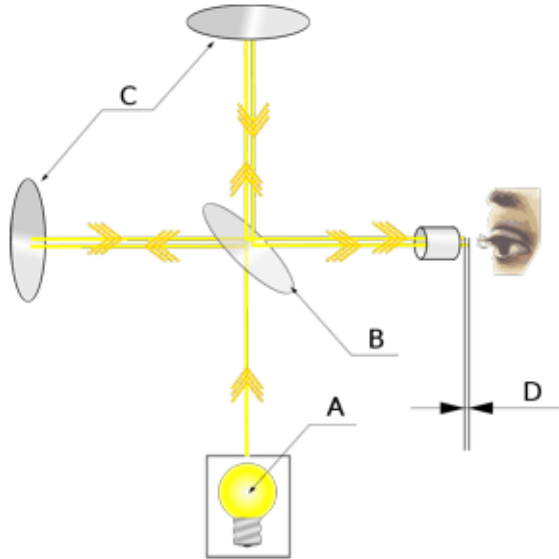


$$C_{\text{Obs}} = c + v$$

Observador **alejándose** de la fuente luminosa ("viento de éter" en contra).
Mide una velocidad igual a $c + v$.

Con el propósito de comprobar la dependencia de la velocidad de la luz con el movimiento fuente-observador, **Michelson y Morley** realizaron en **1887** un experimento de gran importancia para el posterior desenvolvimiento de la física ⁽¹⁾

El experimento trataba de detectar la diferente velocidad de la luz cuando la fuente luminosa (o el observador) se mueven respecto del éter. Se trataba de detectar el "viento del éter".



El aparato utilizado (interferómetro de Michelson) consta de un espejo semiplataado B (que deja pasar la mitad de la luz y refleja la otra mitad), sobre el que incide un haz de luz procedente de A. La mitad de la luz atraviesa el espejo sin desviarse, llega al espejo superior, se refleja en él y, tras llegar nuevamente al espejo semiplataado, se refleja y llega al ojo del observador.

La otra mitad del rayo incidente se refleja en el espejo semiplataado y alcanza el espejo de la izquierda, reflejándose. Tras atravesar el espejo central llega al ojo del observador produciéndose la superposición de ambos rayos. Como consecuencia, se observará una figura de interferencia que variará dependiendo del desfase de los rayos incidentes.

La Tierra orbita alrededor del Sol a una velocidad de unos 30 km/s. Si consideramos que el haz horizontal del interferómetro está orientado en la dirección en que la Tierra se mueve, cabría esperar alguna diferencia de velocidad entre este rayo y el que se propaga verticalmente, ya que según la física clásica la velocidad de los rayos no es la misma en ambos trayectos. Esto provocaría una diferencia en fase entre ambos que podría ser observada como franjas de interferencia. Si ahora rotamos el interferómetro la diferencia en fase iría variando, debiendo de apreciarse un desplazamiento de las franjas de interferencia observadas.

El experimento fue repetido multitud de veces y no se obtuvo nunca el desplazamiento de las franjas de interferencia predicho. En consecuencia el "viento de éter" no se detectaba y la velocidad de la luz, por tanto, parecía independiente del movimiento de la fuente.

(Vídeo del experimento de Michelson y Morley: <https://www.youtube.com/watch?v=uawZjrU3d1M>)

A principios del s. XX había que resolver, por tanto, algunos importantes problemas relacionados con la luz.

⁽¹⁾ Michelson había realizado ya el experimento en 1881, pero los errores cometidos hicieron que los resultados no fueran considerados válidos.

Teoría de la Relatividad Especial

Albert Einstein (1879-1955) (quien según sus propias palabras desconocía el experimento de Michelson y Morley) plantea una solución **orientada a salvar el principio de relatividad. El principio de relatividad debería de ser válido tanto para la mecánica como para el electromagnetismo y la óptica.**

En el fondo estaba una clara apuesta por la **universalidad de las leyes de la física**. Su planteamiento implicaba dos suposiciones básicas:

- **Prescindir del éter lumínico** y con él **de un sistema de referencia privilegiado** respecto del cual podamos determinar si un cuerpo está en movimiento o reposo absoluto, **lo que equivale a mantener la vigencia del principio de relatividad.**
- **Mantener la afirmación de Maxwell** según la cual las ondas electromagnéticas (por consiguiente la luz) se propagan con una velocidad de 300 000 km/s, pero como ahora no existe el éter como medio de propagación, postula que **esa velocidad es siempre la misma con independencia del movimiento de la fuente respecto del observador. Esta afirmación equivale a elevar la velocidad de la luz a rango de ley física.**



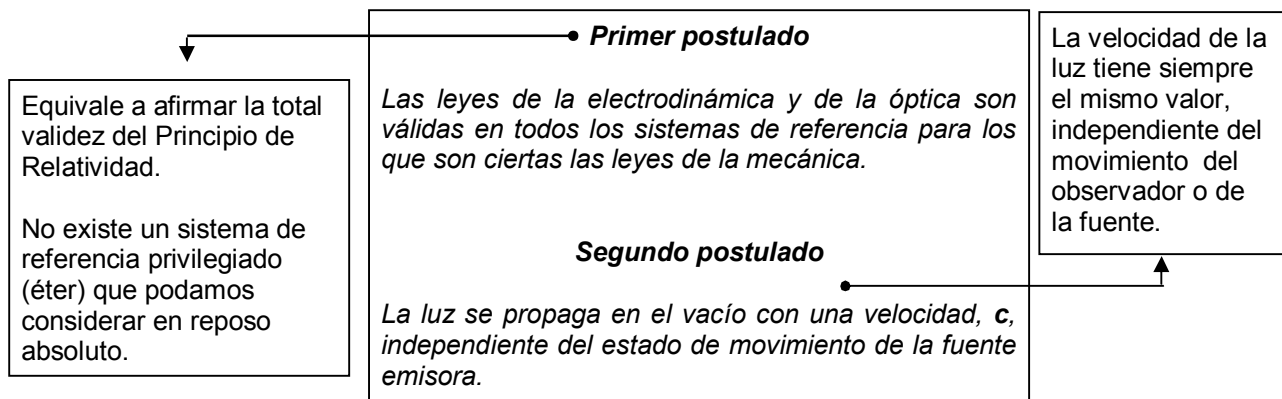
Albert Einstein en 1905

Einstein publicó (1905) un total de cuatro artículos en la revista **Annalen der Physik**, de singular importancia. Uno de ellos, **Sobre la electrodinámica de los cuerpos en movimiento**, contenía los postulados y el desarrollo básico de la que desde entonces se conocería como **Teoría de la Relatividad Especial (TER)**.

La teoría se sustentaba en dos postulados que recogen el razonamiento expuesto más arriba.

La TER daba solución a los problemas planteados pero, a cambio, **los conceptos de espacio y tiempo hasta entonces vigentes, y fuertemente arraigados en la forma de pensar, deberían ser revisados.**

La Teoría de la Relatividad ha significado desde entonces una forma nueva de entender la realidad que, a veces, parece entrar en conflicto con el sentido común.



La consideración de la velocidad de la luz como un invariante (segundo postulado) nos llevará a concluir (ver más adelante) que **el espacio y el tiempo no son absolutos (la medida efectuada para cada una de estas magnitudes no es independiente del estado de movimiento del observador que realiza la medida). Además, espacio y tiempo no son independientes, ambos están ligados formando lo que se llama un continuo espacio-tiempo.**

Según Newton tanto espacio como tiempos son conceptos absolutos. Es decir, el valor de un intervalo de tiempo o uno espacial son independientes del estado de movimiento de los observadores. Un observador en reposo y otro en movimiento respecto del primero obtendrán la misma medida. **Además son conceptos independientes, no ligados entre sí.**

La física newtoniana se acomoda mucho mejor a nuestro sentido común. Este, no obstante, sólo es la forma de razonar **dependiente de nuestras experiencias. Nuestro sentido común nos indica la manera que esperamos que sucedan las cosas como resultado de las experiencias que tenemos**, pero nuestras experiencias no han sido adquiridas a velocidades próximas a las de la luz.

Se muestran a continuación **algunas de las consecuencias** derivadas de la aplicación de los postulados.

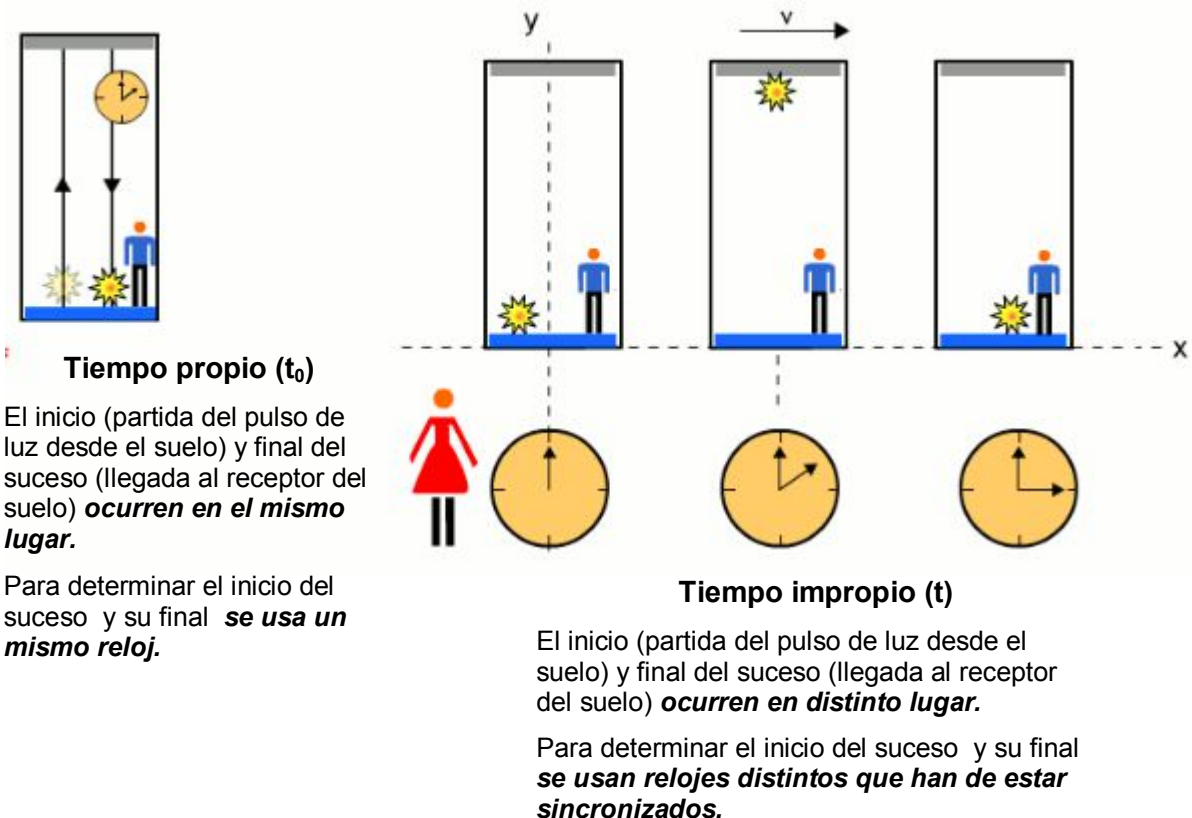
1. Dilatación del tiempo

Una de las conclusiones más sorprendentes de la TER es que **el tiempo deja de ser un absoluto que transcurre igual para todos los observadores (tal y como consideraba la mecánica de Newton), para convertirse en algo relativo que depende del movimiento de quien lo mide.**

En la figura se muestran dos observadores, uno (hombre) situado en el interior de un laboratorio que consideramos que se mueve, según el eje x, con una velocidad **v** respecto de otro (mujer) que suponemos en reposo y en el exterior del laboratorio.

En el interior del laboratorio se realiza un sencillo experimento: un pulso de luz parte de un emisor situado en el suelo del laboratorio, se refleja en un espejo situado en el techo y vuelve al suelo, donde es detectado.

Definimos **tiempo propio (t₀)** y **tiempo impropio (t)** de la manera siguiente:



Según las conclusiones de la teoría el tiempo propio y el impropio no son iguales y están relacionados por la siguiente expresión:

$$\Delta t = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Delta t_0 = \gamma \Delta t_0$$

$$\Delta t = \gamma \Delta t_0$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} > 1$$

γ : factor de Lorentz

Cualquier intervalo de tiempo impropio (Δt) es siempre mayor que el de tiempo propio (Δt_0)

Obtenemos que el mismo suceso requiere un tiempo mayor para el observador considerado en reposo. **El reloj del observador situado en el interior del laboratorio atrasa respecto del reloj del observador considerado en reposo.**

El tiempo transcurre más lentamente para el observador en movimiento. El tiempo se dilata cuando nos movemos a velocidades próximas a las de la luz.

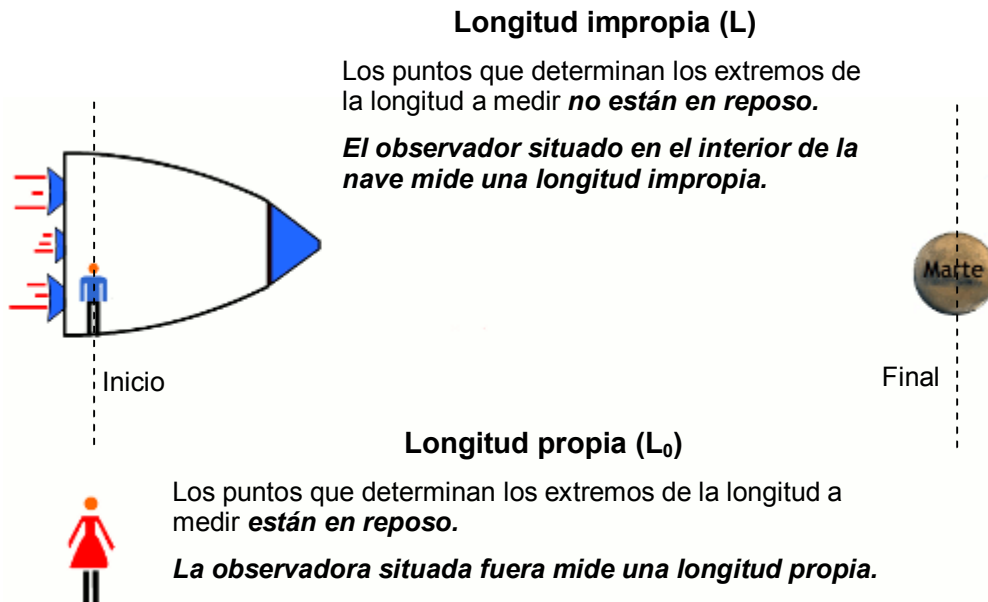
Supongamos que el laboratorio se mueve respecto del observador situado fuera a una velocidad igual a 0,90 c (90 % de la velocidad de la luz) y que el observador situado en el laboratorio obtiene que la luz tardó 1,000 s en hacer el recorrido indicado. El observador situado fuera (y que consideramos en reposo) medirá que la luz tarda en realizar ese recorrido:

$$\Delta t = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Delta t_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(0,90)^2}{1}}} 1,000 \text{ s} = 2,294 \cdot 1,000 \text{ s} = 2,294 \text{ s}$$

2. Contracción de las longitudes

Pensemos en dos observadores, uno en reposo y otro en movimiento, que quieren determinar la distancia entre la Tierra (inicio del viaje) y Marte (final del viaje). Como para ambos observadores la velocidad de la luz debe de ser la misma, y teniendo en cuenta que el tiempo medido por ambos observadores no es el mismo, hemos de concluir que el espacio medido tampoco ha de ser igual.

De forma análoga a lo que hemos visto para el tiempo se definen la **longitud propia** y la **longitud impropia**



Cualquier longitud propia (L₀) es siempre mayor que la longitud impropia (L)

$$\Delta L_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Delta L = \gamma \Delta L \quad \Delta L_0 = \gamma \Delta L \quad \gamma > 1$$

Las distancias (medidas en la misma dirección del movimiento) se contraen para un observador en movimiento respecto de uno que consideramos en reposo.

En el supuesto anterior (v = 0,80c) si el observador situado en el laboratorio (considerado en movimiento) mide una distancia a Marte de 59 · 10⁶ km, el observador que viaja en la nave medirá:

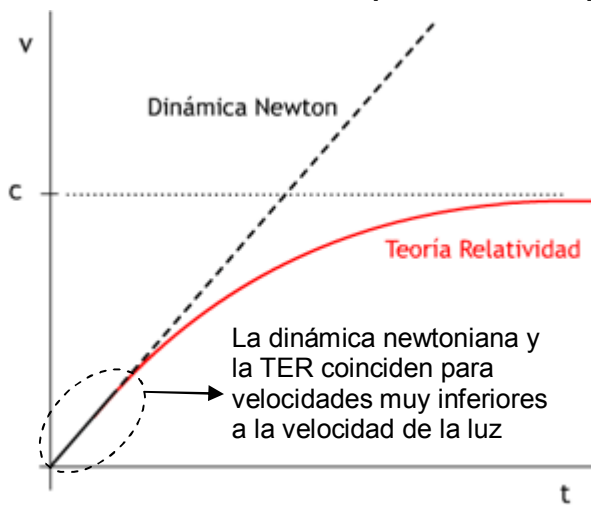
$$\Delta L_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Delta L, \quad \Delta L = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Delta L_0 = \sqrt{1 - \frac{(0,80)^2}{1}} 59 \cdot 10^6 \text{ km} = 35,3 \cdot 10^6 \text{ km}$$

El significado profundo de la dilatación del tiempo y la contracción de longitudes radica en que si aceptamos los postulados de la TER, el tiempo y el espacio dejan de ser magnitudes independientes para estar íntimamente relacionadas.

Los sucesos ya no tienen lugar en un espacio y en un tiempo independientes entre sí (tal y como se suponía en la mecánica newtoniana), para tener lugar en un **continuo espacio-tiempo** en el cual **ambas magnitudes están conectadas**.

3. La velocidad de la luz es un límite superior para cualquier entidad física

Si algo pudiera tener una velocidad igual o superior a la de la luz, ésta nunca podría propagarse respecto de ella con velocidad c , lo que viola uno de los postulados. Esta consideración es de suma importancia en la TER, pudiendo, incluso, tomarse como punto de partida de la misma. El propio Einstein declaró que **"la Teoría de la Relatividad es un nuevo tipo de mecánica caracterizada por el hecho de que ninguna velocidad puede superar a la de la luz"**.



La existencia de un límite superior de velocidades entra en contradicción con la segunda ley de Newton ($F = m a$), ya que según la dinámica newtoniana si aplicamos una fuerza a un objeto éste aumentaría su velocidad sin límite alguno.

En la gráfica se muestra la diferencia entre la dinámica de Newton y la TER. Ambas coinciden cuando $v \ll c$, pero en la TER la velocidad de la luz es un límite máximo infranqueable.

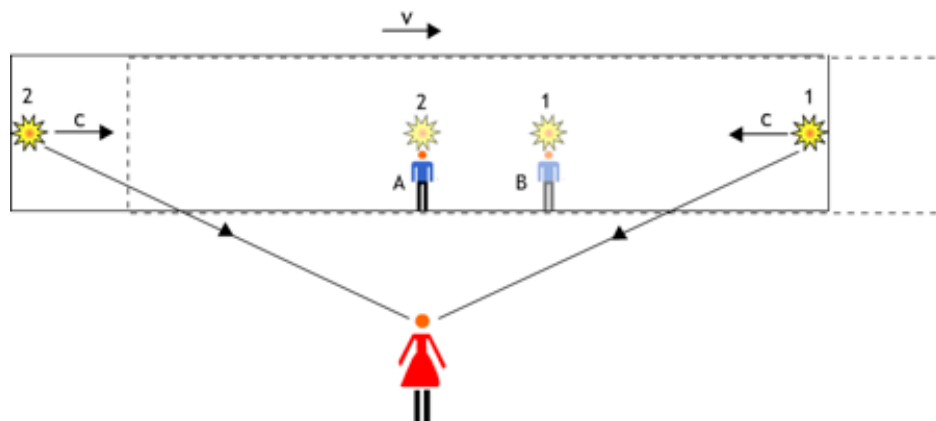
Los postulados de la TER obligan, por tanto, a rehacer completamente la dinámica de Newton.

4. La simultaneidad de dos sucesos depende del sistema de referencia

Supongamos (ver figura) que se generan sendos destellos luminosos (1 y 2) en la parte delantera y trasera del vagón en el momento en que ambos puntos están equidistantes del observador situado fuera. Ambos destellos recorren el mismo espacio y, por consiguiente, alcanzarán al observador externo al mismo tiempo. **Éste concluirá, por tanto, que ambos destellos han sido simultáneos.**

El observador situado en el interior tiene una velocidad v hacia la derecha respecto del observador exterior y se dirige al encuentro del destello originado en la parte delantera (1) a una velocidad v . Al cabo de un tiempo t el vagón, y con él su ocupante, se desplaza un espacio $v t$, pasando de estar en la posición A a estar en la B. Este observador será alcanzado antes por el destello delantero y después por el que procede de la parte trasera. **Para él los destellos no son simultáneos.**

La simultaneidad es un concepto relativo y no absoluto.



5. Relación masa-energía-momento lineal

Tal y como se ha dicho más arriba la segunda ley de la dinámica de Newton resulta incompatible con los postulados de la TER. Había que construir, por tanto, una nueva dinámica adaptada a la nueva concepción del espacio-tiempo que subyace en la teoría de Einstein (espacio y tiempo son magnitudes mutuamente dependientes).

La expresión fundamental en dinámica relativista para una partícula relaciona su masa, energía y momento lineal en la forma:

$$E^2 = (m c^2)^2 + (p c)^2 = m^2 c^4 + p^2 c^2 \quad (1)$$

De la expresión se puede inferir otro importante concepto de la teoría. **Al igual que el tiempo y el espacio están interconectados, también lo están la energía, la masa y el momento lineal de una partícula. Son magnitudes interdependientes⁽²⁾.**

Otra ecuación fundamental es la que relaciona el momento lineal y la energía:

$$p = v \frac{E}{c^2} \quad (2)$$

Partiendo de estas expresiones podemos llegar a algunas importantes conclusiones:

- Si suponemos un sistema de referencia, respecto del cual la partícula está en reposo, su momento lineal (p) será nulo (ver ecuación 2), obteniendo entonces de la ecuación (1):

$$E_0 = m c^2$$

E_0 es la llamada **energía propia** o **energía en reposo** de la partícula, uno de los grandes descubrimientos de la teoría.

La ecuación que define la energía propia de una partícula permite expresar la masa en unidades de energía (lo que es muy útil cuando se trabaja con partículas).

En física de partículas se utiliza como unidad de energía la adquirida por un electrón (carga: $1,60 \cdot 10^{-19}$ C) cuando es sometido a una diferencia de potencial de 1 V. Esta unidad se denomina **electrón-voltio** y se abrevia como eV.

$$E = e V = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 1 \text{ V} = 1,67 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

$$1 \text{ eV} = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

La energía correspondiente a la masa en reposo de un electrón ($9,11 \cdot 10^{-31}$ kg) será:

$$E = m c^2 = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg} (3 \cdot 10^8)^2 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} = 8,20 \cdot 10^{-14} \text{ J}$$

$$8,20 \cdot 10^{-14} \text{ J} \cdot \frac{1 \text{ eV}}{1,60 \cdot 10^{-19} \text{ J}} = 5,13 \cdot 10^5 \text{ eV} = 0,513 \text{ MeV} = 0,000513 \text{ GeV}$$

Se dice que la masa de un electrón son 0,000513 GeV.

También podemos decir que la masa de un electrón son $0,000513 \text{ GeV}/c^2$ (ya que $m = E/c^2$)

Siguiendo el mismo procedimiento podemos calcular la masa de un protón ($1,67 \cdot 10^{-27}$ kg):

$$E = m c^2 = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg} (3 \cdot 10^8)^2 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} = 1,50 \cdot 10^{-10} \text{ J}$$

$$1,50 \cdot 10^{-10} \text{ J} \cdot \frac{1 \text{ eV}}{1,67 \cdot 10^{-19} \text{ J}} = 8,98 \cdot 10^8 \text{ eV} = 898 \text{ MeV} = 0,898 \text{ GeV}$$

NOTA: Las masas admitidas para el electrón y el protón son de $0,000511 \text{ GeV}/c^2$ y $0,938 \text{ GeV}/c^2$, respectivamente

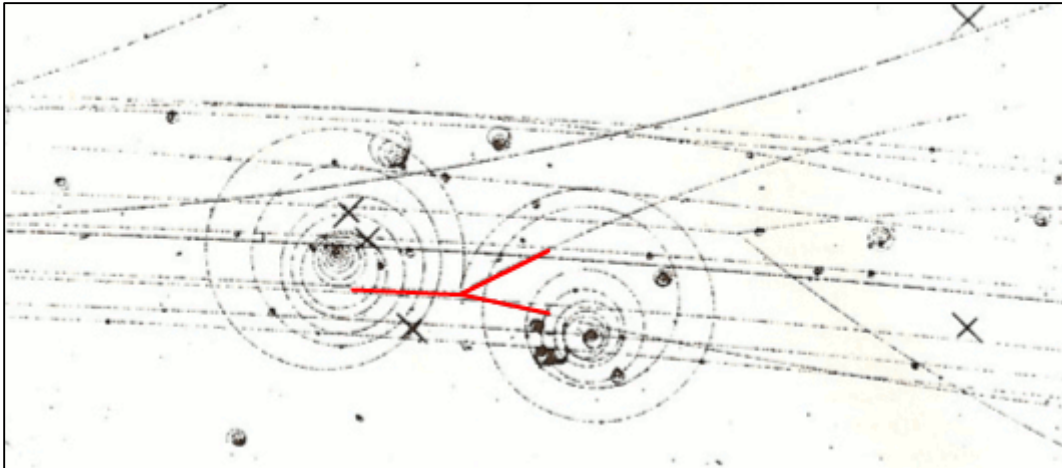
⁽²⁾ En la TER aparece lo que se denomina **cuadrivector momento lineal-energía**, que consta de tres componentes espaciales, relacionadas con el momento lineal, y una componente temporal, relacionada con la energía.

La ecuación ($E_0=mc^2$) plantea la equivalencia entre masa y energía. En palabras del propio Einstein: **"masa y energía son esencialmente análogas, pues sólo son expresiones del mismo ente"**

La TER predice, por tanto, la posibilidad de **obtener enormes cantidades de energía a partir de la aniquilación de pequeñas cantidades de materia**, posibilidad que condujo a la construcción de la primera bomba atómica.

Otra posibilidad es la de **crear partículas con masa a partir de pura energía**

La "materialización de la energía" queda patente en la fotografía que se muestra y que corresponde a trazas dejadas por partículas cargadas en un detector.



Un chorro de mesones K^- entra desde la izquierda. Su trayectoria se curva muy ligeramente en el sentido de las agujas del reloj (debido al campo magnético perpendicular al papel y entrante) ya que tienen una masa considerable.

En el centro de la imagen uno de los mesones se desintegra dando lugar a dos nuevas partículas cargadas (ver trazo rojo) y un rayo gamma de alta energía. Este no deja traza alguna al carecer de carga, pero da lugar a un par electrón-positrón (creación de partículas a partir de energía) cuyas trazas en espiral pueden apreciarse claramente.

La espiral de la derecha (curvada en el sentido de las agujas del reloj) pertenece al electrón y la de la izquierda (curvada en sentido antihorario), al positrón.

Ejemplo 1

Un fotón con una energía de $1,32 \cdot 10^{-12}$ J se materializa en un par electrón-positrón. Calcular la energía cinética del par resultante.

DATOS: $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg

Solución:

La energía del fotón inicial se materializa en un par de partículas (partícula-antipartícula). La energía correspondiente a la masa del electrón (que será idéntica a la del positrón) será:

$$E_0 = m c^2 = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot (3 \cdot 10^8)^2 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} = 8,2 \cdot 10^{-14} \text{ J}$$

Por tanto la energía total correspondiente a las partículas generadas será:

$$E_{\text{Tot}} = 2 \cdot (8,2 \cdot 10^{-14}) \text{ J} = 1,6 \cdot 10^{-13} \text{ J}$$

Aplicando el principio de conservación de la energía deducimos que las partículas generadas deberán tener una energía cinética de:

$$E_c = 1,32 \cdot 10^{-12} \text{ J} - 1,6 \cdot 10^{-13} \text{ J} = 1,2 \cdot 10^{-12} \text{ J}$$

Expresándola en eV:

$$E_c = 1,2 \cdot 10^{-12} \text{ J} \cdot \frac{1 \text{ eV}}{1,67 \cdot 10^{-19} \text{ J}} = 7,2 \cdot 10^6 \text{ eV} = 7,2 \text{ MeV}$$

- ¿Cómo se calcula en dinámica relativista la energía de una partícula que se mueve con velocidad v?

De la ecuación (2), obtenemos: $pc = \frac{vE}{c}$, que sustituido en (1) nos da:

$$E^2 = \left(\frac{vE}{c}\right)^2 + (pc)^2 = (mc^2)^2 + \left(\frac{vE}{c}\right)^2$$

$$E^2 - \left(\frac{vE}{c}\right)^2 = (mc^2)^2 ; E^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = (mc^2)^2$$

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$E = \gamma mc^2 \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

También se debe de cumplir :

$$E = E_0 + E_{cin} ; E_{cin} = E - E_0$$

- ¿Cuál es el momento lineal (relativista) de una partícula?

De (2) obtenemos: $pc = \frac{vE}{c}$ y sustituyendo el valor obtenido en el apartado anterior para la energía:

$$p \cancel{c} = \frac{vE}{c} = \frac{v}{\cancel{c}} \gamma m \cancel{c}^2$$

$$p = \gamma m v$$

A la vista de las ecuaciones anteriores algunas veces se habla de la “masa relativista”, definida como:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma m_0$$

y se dice que la masa de un cuerpo aumenta con la velocidad. No obstante, y en palabras del propio Einstein: **“no es conveniente introducir el concepto de masa relativista de un cuerpo en movimiento, porque no puede ser definida claramente. Es preferible no introducir un nuevo concepto de masa distinto al de la masa en reposo. En lugar de introducir esta nueva masa es mejor recurrir a la expresión del momento lineal o a la de la energía de un cuerpo en movimiento”.**

En consecuencia, al igual que ocurre en mecánica clásica, en relatividad la masa es un escalar invariante (masa en reposo). Cuando varía la velocidad de un cuerpo se producen variaciones en su momento lineal y en su energía que pueden calcularse como se detalla más arriba.

- ¿Qué ocurre cuando un cuerpo aumenta su velocidad?

$$p = \gamma m v = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} m v$$

Aumentan, tanto el momento lineal como la energía, y para velocidades próximas a c su valor tiende a infinito.

$$E = \gamma m c^2 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} m c^2$$

El acelerar partículas con masa hasta velocidades próximas a las de la luz requiere u aporte enorme de energía.

Si $v = c$, tendremos: $p = v \frac{E}{c^2} = c \frac{E}{c^2} = \frac{E}{c} ; p c = E$

Sustituyendo en la expresión fundamental de la dinámica relativista, obtenemos:

$$E^2 = (m c^2)^2 + (p c)^2 = (m c^2)^2 + E^2$$

Esta expresión solo es compatible con la condición de que $m = 0$. Por tanto solo pueden adquirir la velocidad de la luz partículas con masa en reposo nula (fotones).