(Oviedo. 2018-2019/ 4.1)

Una satélite para observar el clima se encuentra a una distancia de 705 km sobre la superficie de la Tierra describiendo una órbita circular. Calcule:

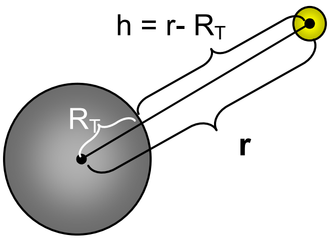
a) A qué velocidad se desplazará el satélite.
b) A qué distancia sobre la superficie de la Tierra deberá de situarse para fuera un satélite geoestacionario.

DATOS: G= 6,67 10^{-11} N m^2/kg^2; R_T= 6370 km; M_T= 5,98 10^{24} kg.

Solución:

a) Teniendo en cuenta la condición para que un objeto describa una circunferencia (F_N= m a_n), y sabiendo que la fuerza centrípeta es la de gravedad y el valor de la aceleración normal en un movimiento circular, se llega fácilmente a la expresión que nos da la velocidad orbital:

$$F_N = m\,a_n\;;\; G\frac{\cancel{m}M}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m}\,\frac{v^2}{\cancel{r}}\;;\; v_o = \sqrt{\frac{G\,M}{r}}$$



$$r = R_T + h = (6370 + 705)\,km = 7075\,km$$

$$v_o = \sqrt{\frac{G\,M}{r}} = \sqrt{\frac{6,67\,10^{-11}\,\frac{N\,m^{\cancel{2}}}{kg^{\cancel{2}}}\,5,98\,10^{24}\,\cancel{kg}}{7,075\,10^{6}\,\cancel{m}}} = 7509\,\frac{m}{s} = 7,51\,\frac{km}{s} = 27\,036\,\frac{km}{h}$$

b) Para que la órbita sea geoestacionaria el periodo orbital deberá de ser igual al de rotación del planeta. Para la Tierra T_{rot}= 24 h = 8,64 10^4 s:

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{G\,M}\right) r^3$$

$$r = \sqrt[3]{\left(\frac{G\,M}{4\pi^2}\right) T^2} = \sqrt[3]{\left(\frac{6,67\,10^{-11}\,\frac{N\,m^2}{kg^2}\,5,98\,10^{24}\,kg}{4\pi^2}\right)\left(8,64\,10^4\right)^2 s^2} = 4,23\,10^7\,m$$

$$h = r - R_T = \left(4,23\,10^{7} - 6,37\,10^{6}\right)m = 3,59\,10^{7}\,m$$

(Oviedo. 2018-2019/ 3.1)

Se envía a Marte en un cohete un vehículo explorador cuyo peso en la Tierra es de 6860 N. Calcule:

a) La aceleración de la gravedad en la superficie de Marte.
b) El peso del vehículo en la superficie de Marte.

DATOS: G= 6,67 10^{-11} N m^2/kg^2; R_T= 6370 km; M_T= 5,98 10^{24} kg; R_M= 3400 km; M_M= 6,42 10^{23} kg.

Solución:

a) El valor de la aceleración de la gravedad en un planeta depende de la masa y radio del planeta y se puede calcular a partir de:

$$g = G\frac{M}{R^2}$$

Para Marte:

$$g_M = G\frac{M_M}{R_M^2} = 6{,}67\,10^{-11}\,\frac{N\,\cancel{m^2}}{kg^{\cancel{2}}}\,\frac{6{,}42\,10^{23}\,\cancel{kg}}{(3{,}4\,10^6)^2\,\cancel{m^2}} = 3{,}70\,\frac{m}{s^2}$$

b) El peso de un objeto (fuerza con que es atraído por el planeta) se calcula multiplicando su masa por el valor de la aceleración de la gravedad:

Para Marte: $P_M = m\, g_M$

Para la Tierra: $P_T = m\, g_T$

$$\frac{P_M}{P_T} = \frac{m\,g_M}{m\,g_T}\,;\,P_M = P_T\,\frac{\cancel{m}\,g_M}{\cancel{m}\,g_T} = P_T\,\frac{g_M}{g_T}$$

Calculamos la gravedad en la Tierra: $$g_T = G\frac{MT}{R_T^2} = 6{,}67\,10^{-11}\,\frac{N\,\cancel{m^2}}{kg^{\cancel{2}}}\,\frac{5{,}98\,10^{24}\,\cancel{kg}}{(6{,}37\,10^6)^2\,\cancel{m^2}} = 9{,}83\,\frac{m}{s^2}$$

$$P_M = P_T\,\frac{g_M}{g_T} = 6860\,N\,\frac{3{,}70\,\frac{\cancel{m}}{\cancel{s^2}}}{9{,}83\,\frac{\cancel{m}}{\cancel{s^2}}} = 2582\,N$$

(Oviedo. 2018-2019/ 2.1)

En el año 2019 una astronauta que forma parte de una misión espacial internacional llega a un planeta esférico en una lejana galaxia. Una vez en la superficie del planeta, la astronauta observa que al dejar caer una pequeña roca desde una altura de 1,90 m llega al suelo con una velocidad de 8 m/s. Si el radio del planeta es 8,60 10^7 m, calcule:

a) La aceleración de la gravedad en la superficie del planeta.
b) La velocidad de escape del planeta.

DATOS: G= 6,67 10^{-11} N m^2/kg^2

Solución:

a) El valor de la aceleración de la gravedad se puede calcular considerando las ecuaciones del MRUA:

$$\left.\begin{array}{l} s = \cancel{s_o} + \cancel{v_0 t} + \frac{1}{2}g\,t^2 \\ v = \cancel{v_0} + g\,t \end{array}\right\}\,s = \frac{1}{2}g\left(\frac{v}{g}\right)^2;\,g = \frac{v^2}{2\,s} = \frac{8^2\,\frac{m^{\cancel{2}}}{s^2}}{2\,.1{,}90\,\cancel{m}} = 16{,}8\,\frac{m}{s^2}$$

b) La velocidad de escape del planeta vendrá dada por: $$v_e = \sqrt{\frac{2\,G\,M}{R}}$$

Considerando la expresión que nos da la gravedad en un planeta: $$g = G\,\frac{M}{R^2}\,;G\,M = g\,R^2$$

Combinando ambas expresiones

$$v_e = \sqrt{\frac{2\,G\,M}{R}} = \sqrt{\frac{2\,g\,R^{\cancel{2}}}{\cancel{R}}} = \sqrt{2\,.16{,}8\,\frac{m}{s^2}\,8{,}60\,.10^7 m} = 53\,755\,\frac{m}{s} = 53{,}8\,\frac{m}{s} = 193\,680\,\frac{km}{h}$$

(Oviedo. 2018-2019/ 1.1)

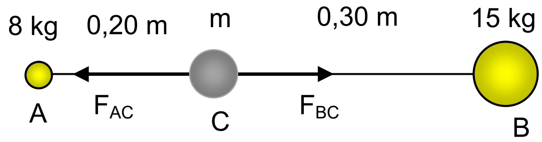
Dos masas puntuales A (m_A=8 kg) y B (m_B=15 kg) se encuentran a una distancia fija de 50 cm. Una partícula de masa *m* se abandona inicialmente en reposo en un punto del segmento que conecta A y B a una distancia de 20 cm de la masa A.

a) Calcule la aceleración que adquiere la partícula en este punto (módulo, dirección y sentido).
b) Obtenga la energía potencial gravitatoria en este punto si la partícula tiene una masa de 5 kg.

DATOS: G= 6,67 10 $^{-11}$ N m^2/kg^2

Solución:

a)



La fuerza actuante sobre C será la resultante de la suma (vectorial) de las fuerzas ejercidas sobre m por A (F_{AC}) y por B (F_{BC}):

$$\left.\begin{aligned}\vec{F}_{AC} &= -G\,\frac{m_A\, m}{d_A^2}\,\vec{i}\\ \vec{F}_{BC} &= -G\,\frac{m_B\, m}{d_B^2}\,\vec{i}\end{aligned}\right\}\vec{F}_{Tot} = G\, m\left(\frac{m_B}{d_B^2}-\frac{m_A}{d_A^2}\right)\vec{i}$$

$$\vec{F}_{Tot} = m\,\vec{a}\,;\,\vec{a} = G\left(\frac{m_B}{d_B^2}-\frac{m_A}{d_A^2}\right)\vec{i} = 6{,}67\,.10-11\,\frac{N\,\cancel{m^2}}{kg\,\cancel{^2}}\left(\frac{15}{0{,}30^2}-\frac{8}{0{,}20^2}\right)\frac{\cancel{kg}}{\cancel{m^2}} = -\left(2{,}22\,.10^{-9}\right)\vec{i}\ \frac{m}{s^2}$$

b) La energía potencial gravitatoria de una masa m colocada en el campo gravitatorio de otra masa M y situada a una distancia r viene dada por:

$$Ep = -G\,\frac{m\,M}{r}$$

La energía potencial de la masa considerada será la suma (escalar) de la energía potencial debida al campo gravitatorio de A y B:

$$\left.\begin{aligned}Ep_A &= -G\,\frac{m\,m_A}{r_A}\\ Ep_B &= -G\,\frac{m\,m_B}{r_B}\end{aligned}\right\}Ep_{Tot} = -G\,m\left(\frac{m_A}{r_A}+\frac{m_B}{r_B}\right)$$

$$Ep_{Tot} = -G\,m\left(\frac{m_A}{r_A}+\frac{m_B}{r_B}\right) = -6{,}67\,10^{-11}\,\frac{N\,m^{\cancel{2}}}{\cancel{kg}\,\cancel{^2}}\,5\,\cancel{kg}\left(\frac{8}{0{,}20}+\frac{15}{0{,}30}\right)\frac{\cancel{kg}}{\cancel{m}} = -3{,}00\,.10^{-8}\ J$$

(Oviedo. 2017-2018/ 4.1)

Un satélite artificial de comunicaciones, de 500 kg de masa, describe una órbita circular de 9000 km de radio en torno a la Tierra.:

a) Calcule su energía en esta órbita.
b) En un momento dado, se decide variar el radio de la órbita, para lo cual se enciende uno de los cohetes propulsores del satélite, comunicándole un impulso tangente a su trayectoria antigua. Si el radio de la nueva órbita descrita por el satélite, en torno a la Tierra, es de 13 000 km, calcule el trabajo de los motores en el proceso.
c) Determine el periodo de la nueva órbita.

DATOS: R_T= 6380 km; g_0= 9,8 m/s^2.

Solución:

a) La energía total para una órbita circular vale: $E_{Tot}=\frac{1}{2}Ep=-\frac{1}{2}\frac{G\,M_T\,m}{r}$

El valor de la gravedad en la superficie de la Tierra (g_0): $g_0=G\frac{M_T}{R_T^2}$; $G\,M_T=g_0\,R_T^2$

Combinando ambas expresiones obtenemos:

$$E_{Tot}=\frac{1}{2}Ep=-\frac{1}{2}\frac{g_0\,R_T^2\,m}{r}=-\frac{1}{2}\frac{9,8\frac{\cancel{m}}{s^2}(6,38\,.10^6)^2\,m^2\,500\,kg}{9\,10^6\,\cancel{m}}=-1,11.10^{10}\,J$$

b) La energía para la nueva órbita será:

$$E_2=\frac{1}{2}Ep_2=-\frac{1}{2}\frac{g_0\,R_T^2\,m}{r_2}=-\frac{1}{2}\frac{9,8\frac{\cancel{m}}{s^2}(6,38\,.10^6)^2\,m^2\,500\,kg}{1,3\,10^7\,\cancel{m}}=-7,67\,.10^9\,J$$

Por tanto los motores deberán de suministrar la diferencia de energía entre ambas órbitas:

$$\Delta Ep=Ep_2-Ep_1=(-7,67\,.10^9+1,11.10^{10})\,J=3,43\,.10^9\,J$$

c) Según la tercera ley de Kepler:

$$T^2=k\,r^3=\left(\frac{4\,\pi^2}{G\,M}\right)r^3$$

$$T=2\pi\sqrt{\frac{r^3}{G\,M}}=2\pi\sqrt{\frac{r^3}{g_0\,R_T^2}}=2\pi\sqrt{\frac{(1,3\,.10^7)^3\,\cancel{m^3}}{9,8\frac{\cancel{m}}{s^2}(6,38\,.10^6)^2\,\cancel{m^2}}}=14\,746\,s=4\,h\;\;5\,min\;\;46\,s$$

(Oviedo. 2017-2018/ 3.1)

Un satélite gira en órbita circular alrededor de la Tierra a 3000 km de distancia de su centro. Si hubiese otra satélite girando también en órbita circular, con la mitad de velocidad que el anterior pero alrededor de Plutón:

a) ¿A qué distancia del centro de Plutón estaría situado?
b) ¿Cuál sería la relación entre los periodos de ambos satélites?

DATOS: La masa de Plutón es aproximadamente el 2% de la masa de la Tierra.

Solución:

a) Para un objeto que describa una trayectoria circular debe de cumplirse:

$$F_N = m\,a_n \;;\; G\frac{\cancel{m}M}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m}\,\frac{v^2}{\cancel{r}} \;;\; v = \sqrt{\frac{G\,M}{r}}$$

Planteando las velocidades orbitales para la Tierra y Plutón:

$$\left.\begin{aligned} v_T &= \sqrt{\frac{G\,M_T}{r_T}} \\ v_P &= \sqrt{\frac{G\,M_P}{r_P}} \end{aligned}\right\} \frac{v_T}{v_P} = \frac{\sqrt{\frac{G\,M_T}{r_T}}}{\sqrt{\frac{G\,M_P}{r_P}}} = \sqrt{\frac{M_T\,r_P}{M_P\,r_T}}$$

Teniendo en cuenta la relación entre las velocidades y las masas:

$$\frac{v_T}{v_P} = \sqrt{\frac{M_T\,r_P}{M_P\,r_T}} \;;\; \frac{\cancel{v_T}}{\frac{\cancel{v_T}}{2}} = \sqrt{\frac{\cancel{M_T}\,r_P}{0{,}02\,\cancel{M_T}\,r_T}} \;;\; 2 = \sqrt{\frac{r_P}{0{,}02\;r_T}}$$

$$r_P = 0{,}08\,r_T = 0{,}08\,.3000\,\text{km} = 2400\,\text{km}$$

b) Si suponemos órbitas circulares podemos relacionar velocidad orbital con periodo según:

$$v = \omega\,r = \frac{2\,\pi}{T}\,r$$

Aplicando la ecuación a Plutón y la Tierra y teniendo en cuenta la relación entre las velocidades orbitales y los radios, tendremos:

$$\left.\begin{aligned} v_T &= 2\,\pi\frac{r_T}{T_T} \\ v_P &= 2\,\pi\frac{r_P}{T_P} \end{aligned}\right\} \frac{v_T}{v_P} = \frac{r_T T_P}{r_P T_T}$$

$$\frac{T_P}{T_T} = \frac{v_T\;r_P}{v_P\;r_T} = \frac{\cancel{v_T}\;0{,}08\;\cancel{r_T}}{\frac{\cancel{v_T}}{2}\;\cancel{r_T}} = 0{,}16\;;\; \boxed{T_P = 0{,}16\;T_T}$$

(Oviedo. 2017-2018/ 2.1)

En el punto A (2,0) se sitúa una masa de 2 kg y en el punto B (5,0) se coloca otra masa de 4 kg. Las longitudes se miden en metros. Calcula:

a) El potencial del campo gravitatorio en el origen de coordenadas y en el punto (2,4).
b) Si se sitúa una masa de 1 kg en el origen de coordenadas ¿Qué fuerza resultante actúa sobre ella?
c) ¿Puede indicar el valor del trabajo realizado para llevar esa masa desde el origen de coordenadas hasta fuera del campo?

DATOS: G= 6,67 10^{-11} N m^2/kg^2

Solución:

a) El potencial del campo gravitatorio en un punto viene dado por: $V=\frac{Ep}{m}=-\frac{G\,M}{r}$

Calculando el potencial debido a cada masa y sumándolos (principio de superposición), tenemos:

$$V_A-\frac{G\,M_A}{r_A}=\frac{6,67\,.10^{-11}\,\frac{N\,m^{\cancel{2}}}{kg^{\cancel{2}}}\,2\,\cancel{kg}}{2\,\cancel{m}}=-\,6,67\,.10^{-11}\,\frac{J}{kg}$$

$$V_B-\frac{G\,M_B}{r_B}=\frac{6,67\,.10^{-11}\,\frac{N\,m^{\cancel{2}}}{kg^{\cancel{2}}}\,4\,\cancel{kg}}{5\,\cancel{m}}=-\,5,34\,.10^{-11}\,\frac{J}{kg}$$

$$V_{(0,0)}=V_A+V_B=-\left(6,67\,.10^{-11}+5,34\,.10^{-11}\right)\frac{J}{kg}=-\,1,20\,.10^{-10}\,\frac{J}{kg}$$

Para el punto (2,4):

$$V_A-\frac{G\,M_A}{r_A}=\frac{6,67\,.10^{-11}\,\frac{N\,m^{\cancel{2}}}{kg^{\cancel{2}}}\,2\,\cancel{kg}}{4\,\cancel{m}}=-\,3,34\,.10^{-11}\,\frac{J}{kg}$$

$$V_B-\frac{G\,M_B}{r_B}=\frac{6,67\,.10^{-11}\,\frac{N\,m^{\cancel{2}}}{kg^{\cancel{2}}}\,4\,\cancel{kg}}{5\,\cancel{m}}=-\,5,34\,.10^{-11}\,\frac{J}{kg}$$

$$V_{(2,4)}=V_A+V_B=-\left(3,34\,.10^{-11}+5,34\,.10^{-11}\right)\frac{J}{kg}=-\,8,68\,.10^{-11}\,\frac{J}{kg}$$

b) La fuerza resultante será la suma (vectorial) de las dos fuerzas debidas a las masas

$$\overrightarrow{F_A}-\frac{G\,m\,M_A}{r_A^2}\left(-\vec{i}\right)=-\frac{6,67\,.10^{-11}\,\frac{N\,m^{\cancel{2}}}{kg^{\cancel{2}}}\,1\,\cancel{kg}\,2\,\cancel{kg}}{2^2\,\cancel{m^2}}\left(-\vec{i}\right)=3,34\,.10^{-11}\,\vec{i}\,(N)$$

$$\overrightarrow{F_B}-\frac{G\,m\,M_B}{r_B^2}\left(-\vec{i}\right)=-\frac{6,67\,.10^{-11}\,\frac{N\,m^{\cancel{2}}}{kg^{\cancel{2}}}\,1\,\cancel{kg}\,4\,\cancel{kg}}{5^2\,\cancel{m^2}}\left(-\vec{i}\right)=1,07\,.10^{-11}\,\vec{i}\,(N)$$

$$\overrightarrow{F_{Tot}}=\left(3,34\,.10^{-11}\,\vec{i}+1,07\,.10^{-11}\,\vec{i}\right)N=4,41.10^{-11}\,\vec{i}\,(N)$$

c) El trabajo realizado por el campo (fuerza conservativa) viene dado por:

$$W=-\Delta Ep=Ep_1-Ep_2=m\,(V_1-V_2)$$

Teniendo en cuenta que, por definición, a distancia infinita la energía potencial es nula:

$$W=-\Delta Ep=Ep_1-Ep_2=Ep_1=mV_1=1\,\cancel{kg}\,(-1,20\,.10^{10}\,\frac{J}{\cancel{kg}})=-1,20\,.10^{10}\,J$$

Cuando una fuerza conservativa realiza trabajo negativo significa que aumenta la energía potencial de la masa. Como las masas se mueven espontáneamente en el sentido en que disminuye la energía potencial el proceso no será espontáneo. ***Por consiguiente para llevar la masa desde el origen al infinito tendríamos que proporcionar una energía de*** 1,20 10^{10} J.

(Oviedo. 2017-2018/ 1.1)

El planeta Marte dista del Sol 2,28 10^{11}m, mientras que la Tierra dista 1,5 10^{11}m. Considerando para ambos planetas órbitas circulares:

a) ¿Cuántos años terrestres transcurren en un periodo orbital de Marte?
b) Determine la masa del Sol.

DATOS: 1 año terrestre= 365,25 días, G= 6,67 10^{-11} Nm^2/kg^2

Solución:

a) Según la tercera ley de Kepler la relación entre periodo orbital y distancia (media) al Sol viene dada por:

$$T^2 = k\, r^3$$

Como en este caso el astro central (Sol) es el mismo para ambos planetas la constante será la misma, por tanto:

$$\left.\begin{aligned} T_T^2 &= k\, r_T^3 \\ T_M^2 &= k\, r_M^3 \end{aligned}\right\} \frac{T_T^2}{T_M^2} = \frac{r_T^3}{r_M^3}$$

$$T_T = T_M \sqrt{\frac{r_T^3}{r_M^3}} = T_M \sqrt{\frac{\left(1{,}5\,.10^{11}\right)^3 \cancel{m^3}}{(2{,}28\,.10^{11})^3 \cancel{m^3}}} = 0{,}534\; T_M$$

$$\boxed{T_M = 1{,}87\; T_T}$$

Si consideramos un año terrestre (365,25 días), el año marciano (una vuelta alrededor del Sol) serán: 683 días terrestres.

b) Partiendo de la tercera ley de Kepler y teniendo en cuenta que la masa que aparece en la constante es la del astro central, Sol en este caso:

$$T^2 = k\, r^3 = \left(\frac{4\,\pi^2}{G\,M\odot}\right) r^3$$

$$M\odot = 4\,\pi^2\,\frac{r^3}{G\,T^2} = 4\,\pi^2\,\frac{(1{,}5\,.10^{11})^3 m^3}{6{,}67\,.10^{-11}\,\frac{N\,m^2}{kg^2}\,(3{,}16\,.10^7)^2 s^2} = 2{,}00.10^{30} kg$$

(Oviedo. 2016-2017/ 4.1)

El planeta X tiene el mismo radio que la Tierra pero su densidad es el doble de la terrestre.

a) ¿Qué valor tendrá la intensidad del campo gravitatorio en su superficie (g_{X0})?
b) ¿A qué altura el valor de g_X será el mismo que en la superficie terrestre?

DATOS: G= 6,67 10 $^{-11}$ N m^2/kg^2; R_T= 6370 km; M_T= 5,98 10^{24} kg; g_0= 9,8 m/s^2.

Solución:

a) Teniendo en cuenta que: d = m/V, y considerando que los planetas son esféricos, al tener idéntico radio tendrán el mismo volumen, de lo que se deduce que la masa del planeta X deberá de ser doble que la Tierra por tener doble densidad.

El valor de la intensidad del campo gravitatorio en la superficie de un planeta es:

$$g = G\,\frac{M}{R^2}$$

Por tanto, al tener el mismo radio y doble masa: $g_{0X}=2\, g_0$.

b)

$$g_X = g_0 = G\,\frac{2\,M_T}{\left(R_x + h\right)^2}\,;\left(R_x + h\right) = \sqrt{\frac{2\,G\,M}{g_0}}$$

$$\left(R_x + h\right) = \sqrt{\frac{2\,.6{,}67\,10^{-11}\,\frac{N\,m^{\cancel{2}}}{kg^{\cancel{2}}}\,5{,}98\,.10^{24}\,\cancel{kg}}{9{,}8\frac{\cancel{m}}{s^2}}} = 9\,022\,195\;m = 9022\;km$$

$$h = (9022 - 6370)\;km = 2652\;km$$

(Oviedo. 2016-2017/ 3.1)

Un minisatélite artificial de 310 kg utilizado para aplicaciones de observación de la Tierra con alta resolución, gira en una órbita circular de 600 km de altura sobre la superficie terrestre.

Calcule:

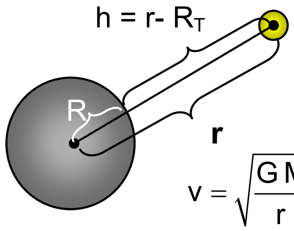
a) Velocidad de la órbita y periodo orbital.
b) Energía potencial y energía mecánica del mismo.
c) Energía necesaria para que partiendo de esa órbita se coloque en otra órbita circular a una altura de 1000 km.

DATOS: G= 6,67 10^{-11} Nm^2/kg^2; R_T= 6370 km; M_T= 5,98 10^{24} kg

Solución:

a) Teniendo en cuenta la condición para que un objeto describa una circunferencia (F_N= m a_n), y sabiendo que la fuerza centrípeta es la de gravedad y el valor de la aceleración normal en un movimiento circular, se llega fácilmente a la expresión que nos da la velocidad orbital:

$$F_N = m\,a_n\,;\; G\frac{\cancel{m}M}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m}\,\frac{v^2}{\cancel{r}}\,;\; v=\sqrt{\frac{G\,M}{r}}$$



$$v=\sqrt{\frac{G\,M}{r}}=\sqrt{\frac{6,67\,10^{-11}\,\frac{N\,m^{\cancel{2}}}{kg^{\cancel{2}}}\,5,98\,10^{24}\,\cancel{kg}}{6,970\,10^{6}\,\cancel{m}}}=7565\,\frac{m}{s}=7,57\,\frac{km}{s}=27\,252\,\frac{km}{h}$$

Teniendo en cuenta la tercera ley de Kepler:

$$T^2=k\,r^3=\left(\frac{4\,\pi^2}{G\,M}\right)r^3$$

$$T=2\pi\sqrt{\frac{r^3}{G\,M}}=2\pi\sqrt{\frac{(6,97\,.10^{6})^3\,\cancel{m^3}}{6,67\,10^{-11}\,\frac{N\,\cancel{m^2}}{kg^{\cancel{2}}}\,5,98\,.10^{24}\,\cancel{kg}}}=5789\,s=1\,h\;\;36\,min\;\;29\,s$$

b) La energía potencial:

$$Ep=-G\,\frac{M_T\,m}{r}=-\,6,67\,10^{-11}\,\frac{N\,m^{\cancel{2}}}{\cancel{kg}^{\cancel{2}}}\,\frac{5,98\,10^{24}\,\cancel{kg}\;310\;\cancel{kg}}{6,97\,10^{6}\;\cancel{m}}=-\,1{,}77\,10^{10}\,J$$

Para una órbita circular la energía mecánica (suma de cinética y potencial) es la mitad de la potencial:

$$E_{Tot}=\frac{1}{2}\,Ep=\frac{1}{2}\left(-1{,}77\,10^{10}\right)J=-\,8,85\,10^{9}\,J$$

c) La energía total para una órbita situada a 1000 km de altura será:

$$E_{Tot}=\frac{1}{2}\,Ep=-\,\frac{1}{2}\,\frac{G\,M_T\,m}{r}=-\,\frac{1}{2}\,\frac{6,67\,10^{-11}\,\frac{N\,m^{\cancel{2}}}{\cancel{kg}^{2}}\,5,98\,10^{24}\,\cancel{kg}\;310\;\cancel{kg}}{7,37\,10^{6}\;\cancel{m}}=-\,8,39\,10^{9}\;J$$

Por tanto para cambiar de órbita habrá aque suministrar la diferencia de energía entre ambas:

$$\Delta E=E_2-E_1=\left(-\,8,39\,10^{9}+8,85\,10^{9}\right)J=4,60\,10^{8}\;J$$

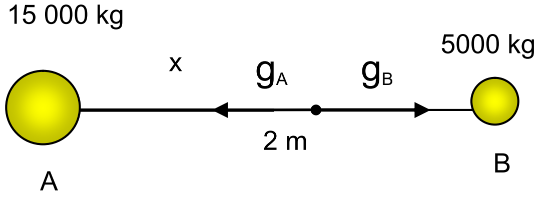
(Oviedo. 2016-2017/ 2.1)

Dos masas de 5000 y 15 000 kg distan 2 m entre sus centros. Determine y discuta la posición del punto o puntos en que la intensidad del campo gravitatorio es nula. ¿En este lugar cuál es el potencial del campo?

DATOS: G= 6,67 10^{-11} N m^2/kg^2

Solución:

a)



En la recta que une ambas masas habrá un punto en el que el campo resultante será nulo, ya que el campo gravitatorio creado por una masa es entrante (hacia la masa) y, en consecuencia, tendrán sentidos contrarios (ver esquema). Llamemos x a la distancia, medida a partir de la masa A (15 000 kg), a la que esto sucede. Podemos plantear:

$$g = G\,\frac{M}{r^2}$$

$$\cancel{G}\,\frac{M_A}{r_A^2} = \cancel{G}\,\frac{M_B}{r_B^2}\;;\;\frac{M_A}{r_A^2} = \frac{M_B}{r_B^2}$$

$$\frac{M_A}{x^2} = \frac{M_B}{(r-x)^2}\;;\;\frac{x}{r-x} = \sqrt{\frac{M_A}{M_B}} = \sqrt{\frac{15\,000\;\cancel{kg}}{5000\;\cancel{kg}}} = \sqrt{3}$$

$$x = \left(\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\right) r = 0,634\,.2\,m = 1,27\,m$$

b) El potencial del campo gravitatorio en un punto viene dado por: $V = \frac{Ep}{m} = -\frac{G\,M}{r}$

Calculando el potencial debido a cada masa y sumándolos (principio de superposición), tenemos:

$$V_A - \frac{G\,M_A}{r_A} = \frac{6,67\,.10^{-11}\,\frac{N\,m^{\cancel{2}}}{kg^{\cancel{2}}}\,15\,000\;\cancel{kg}}{1,27\;\cancel{m}} = -\,7,88\,.10^{-7}\,\frac{J}{kg}$$

$$V_B - \frac{G\,M_B}{r_B} = \frac{6,67\,.10^{-11}\,\frac{N\,m^{\cancel{2}}}{kg^{\cancel{2}}}\,5000\;\cancel{kg}}{0,73\,\cancel{m}} = -\,4,57\,.10^{-7}\,\frac{J}{kg}$$

$$V_{(0,0)} = V_A + V_B = -\left(7,88\,.10^{-7} + 4,57\,.10^{-7}\right)\frac{J}{kg} = -\,1,25\,.10^{-6}\,\frac{J}{kg}$$

(Oviedo. 2016-2017/ 1.1)

El planeta Tierra tiene 6370 km de radio y la aceleración de la gravedad en su superficie es 9,8 m/s^2. Calcule:

a) La densidad media del planeta.
b) La velocidad de escape desde su superficie.

DATOS: Volumen de la esfera: $V=\frac{4}{3}\pi\, r^3$, G= 6,67 10^{-11} N m^2/kg^2

Solución:

a) El valor de la intensidad del campo gravitatorio en la superficie de la Tierra es: $g_0=G\frac{M_T}{R_T^2}$

Por tanto: $M_T=g_0\frac{R_T^2}{G}$

$$d_T=\frac{M_T}{V_T}=\frac{g_0\frac{R_T^2}{G}}{\frac{4}{3}\pi\, r^3}=\frac{3}{4}\frac{g_0}{\pi\, G\, R_T}=\frac{3}{4}\frac{9,8\,\frac{\cancel{m}}{s^2}}{\pi\, 6,67\,.10^{-11}\,\frac{N\,m^2}{kg^2}\,6,370\,.10^6\,\cancel{m}}=5,51\,.10^3\,\frac{kg}{m^3}=5,51\frac{g}{cm^3}$$

b) La velocidad de escape de un planeta viene dada por: $v_e=\sqrt{\frac{2\,G\,M}{R}}$

Considerando el campo gravitatorio en la superficie de la Tierra: $g_0=G\frac{M_T}{R_T^2};G\,M_T=g_0\,R_T^2$

Combinando ambas expresiones:

$$v_e=\sqrt{\frac{2\,G\,M_T}{R_T}}=\sqrt{\frac{2\,g_0\,R_T^{\cancel{2}}}{\cancel{R}_T}}=\sqrt{2\,.9,8\,\frac{m}{s^2}\,6,37\,.10^6 m}=11\;173\,\frac{m}{s}=11,2\,\frac{km}{s}=40\;320\,\frac{km}{h}$$

(Oviedo. 2015-2016/ 8.1)

Calcula la distancia Tierra-Luna, con el dato que la Luna tarda 28 días en su órbita circular alrededor de la Tierra. Calcule:

DATOS: R_T= 6370 km, g_0= 9,8 m/s^2.

Teniendo en cuenta la tercera ley de Kepler y el valor del campo gravitatorio en la superficie de la Tierra

$$\left.\begin{array}{l} g_0=G\frac{M_T}{R_T^2};G\,M_T=g_0\,R_T^2 \\ T^2=\left(\frac{4\pi^2}{GM_T}\right)r^3 \end{array}\right\}T^2=\left(\frac{4\pi^2}{g_0\,R_T^2}\right)r^3\;;\,r=\sqrt[3]{\frac{g_0\,R_T^2T^2}{4\pi^2}}$$

$$r=\sqrt[3]{\frac{g_0\,R_T^2T^2}{4\pi^2}}=\sqrt[3]{\frac{9,8\,\frac{m}{\cancel{s^2}}\left(6,370\,.10^6\right)^2 m^2(2,42\,.10^6)^2\,\cancel{s^2}}{4\pi^2}}=3,90\,.10^8 m=3,90\,.10^5\text{ km}$$

(Oviedo. 2015-2016/ 7.1)

Un satélite de masa m=250 kg describe una órbita circular sobre el Ecuador de la Tierra, a una distancia tal que su periodo orbital coincide con el de rotación de la Tierra (satélite geoestacionario). Calcula:

a) La altura a la que se encuentra el satélite respecto a la superficie terrestre.
b) La energía mínima necesaria para situarlo en dicha órbita.

DATOS: G= 6,67 10^{-11} Nm^2/kg^2; R_T= 6,40 10^6 m; M_T= 5,97 10^{24} kg

Solución:

a) Usamos la tercera ley de Kepler, teniendo en cuenta que al astro central es la Tierra y que el periodo orbital para un satélite geoestacionario ha de ser igual al de rotación del planeta (Tierra). Esto es: 24 h= 86 400 s:

$$T^2=\left(\frac{4\pi^2}{GM_T}\right)r^3\ ;\ r=\sqrt[3]{\frac{G\,M_T T^2}{4\pi^2}}$$

$$r=\sqrt[3]{\frac{6,67\,.10^{-11}\frac{N\,m^2}{kg^2}5,97\,.10^{24}kg\,(8,64\,.10^4)^2s^2}{4\pi^2}}=4,22\,.10^7m=42\,200\,km$$

b) La energía total de la órbita, considerada como circular, es igual a la mitad de su energía potencial:

$$E_{Tot}=\frac{1}{2}Ep=-\frac{1}{2}\frac{G\,M_T\,m}{r}=-\frac{1}{2}\frac{6,67\,10^{-11}\frac{N\,\cancel{m^2}}{\cancel{kg^2}}5,98\,10^{24}\,\cancel{kg}\,250\,\cancel{kg}}{4,22\,10^7\,\cancel{m}}=-1,18\,10^{12}\ J$$

(Oviedo. 2015-2016/ 6.2)

Si la masa del Sol es aproximadamente 2.10^{30} kg y el radio que describe la Tierra en su movimiento (supuesto circular) alrededor del Sol es 1,5.10^8 km, deduce el periodo de traslación de la Tierra alrededor del Sol. Expresa el resultado en el S.I y en días.

DATOS: G= 6,67 10^{-11} Nm^2/kg^2

Solución:

Usamos la tercera ley de Kepler, teniendo en cuenta que al astro central es el Sol:

$$T^2=\left(\frac{4\pi^2}{GM_\odot}\right)r^3\ ;\ T=\sqrt{\left(\frac{4\pi^2}{6,67\,.10^{-11}\frac{N\,m^2}{kg^2}2,0\,.10^{30}kg}\right)(1,5\,.10^{11})^3m^3}=3,16\,.10^7s=366\ días$$

(Oviedo. 2015-2016/ 5.1)

La masa del planeta Júpiter es, aproximadamente, 318 veces la de la Tierra, y su diámetro es 11 veces mayor. Con estos datos calcula el peso que tendrá en Júpiter una astronauta cuyo peso en la Tierra sea de 750 N

Solución:

Teniendo en cuenta la expresión que nos da el valor de la aceleración de la gravedad $g=G\frac{M}{R^2}$:

$$\left.\begin{array}{l}P_T=m\,g_T\\P_J=m\,g_J\end{array}\right\}\frac{P_T}{P_J}=\frac{\cancel{m}\,g_T}{\cancel{m}\,g_J}\ ;P_J=P_T\,\frac{g_J}{g_T}=P_T\,\frac{\cancel{G}\,\frac{M_J}{R_J^2}}{\cancel{G}\,\frac{M_T}{R_T^2}}=\frac{M_JR_T^2}{M_TR_J^2}=\frac{318\,\cancel{M_T}\,\cancel{R_T^2}}{\cancel{M_T}\,5,5^2\,\cancel{R_T^2}}=10,5\ ;\ \boxed{P_J=10,5\,P_T}$$

(Oviedo. 2015-2016/ 3.1)

Dos planetas iguales orbitan alrededor de una estrella de masa mucho mayor. El planeta A se mueve en una órbita circular de 10^8 km de radio y 2 años de periodo. El otro planeta, B; lo hace en una órbita elíptica, siendo la distancia en la posición más cercana a la estrella 10^8 km y en la más alejada 2.10^8 km.

a) Calcular la masa de la estrella.
b) Determinar el periodo del planeta B

DATOS: G= 6,67 10^{-11} Nm^2/kg^2

Solución:

a) Usamos la tercera ley de Kepler y tenemos en cuenta que el astro central es la estrella de masa desconocida:

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM_E}\right) r^3 \,;\, M_E = \left(\frac{4\pi^2}{G}\right)\frac{r^3}{T^2} = \left(\frac{4\pi^2}{6,67\,.10^{-11}\,\frac{N\,m^2}{kg^2}}\right)\frac{(1,0\,.10^{11})^3 m^3}{(6,31.10^7)^2 s^2} = 1,5\,.10^{29} kg$$

b) Como la órbita es elíptica en la expresión de la tercera ley de Kepler consideraremos como distancia el valor del semieje mayor: 2.10^8 km:

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM_E}\right) r^3; T = \sqrt{\left(\frac{4\pi^2}{6,67\,.10^{-11}\,\frac{N\,m^2}{kg^2}\,1,5\,.10^{29} kg}\right)(2,0\,.10^{11})^3 m^3} = 1,8\,.10^8\ s = 5,6\ \text{años}$$

(Oviedo. 2015-2016/ 1.1)

Un satélite de 2.10^3 kg de masa gira alrededor de la Tierra en una órbita circular de 2.10^4 km de radio.

a) Sabiendo que la gravedad en la superficie de la Tierra es de 9.8 m/s^2, ¿cuál será el valor de la gravedad en esta órbita?
b) Cuánto vale la velocidad angular del planeta?

DATOS: R_T= 6370 km

Solución:

a) El valor de la gravedad en la superficie de la Tierra viene dado por $g_0 = G\,\frac{M_T}{R_T^2}$

$$g_0 = G\,\frac{M_T}{R_T^2}\,;\, G\,M_T = g_0\,R_T^2$$

El valor de la gravedad a una distancia r, será: $g = G\,\frac{M_T}{r^2}$, operando tenemos:

$$g = G\,\frac{M_T}{r^2} = \frac{g_0\,R_T^2}{r^2} = \frac{9,8\,\frac{m}{s^2}\,(6,37\ 10^6)^2\,\cancel{m^2}}{(2\ \ .10^7)^2\,\cancel{m^2}} = 0,99\,\frac{m}{s^2} \simeq 1,0\,\frac{m}{s^2}$$

b)

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM_T}\right) r^3 = \left(\frac{4\pi^2}{g_0\,R_T^2}\right) r^3; T = \frac{2\pi}{R_T}\sqrt{\frac{r^3}{g_0}} = \frac{2\pi}{6,37\,.10^6 m}\sqrt{\frac{(2\,.10^7)^3 m^3}{9,8\,\frac{m}{s^2}}} = 2,82\,.10^4 s = 7\ h\ 50\ min$$

(Oviedo. 2014-2015/ 8.2)

Calcula razonadamente el valor de la intensidad del campo gravitatorio en la superficie de un planeta cuya masa es 3 veces la masa de la Tierra y su radio 2 veces el radio terrestre.

DATOS: Intensidad del campo gravitatorio en la superficie de la Tierra: g_0= 9,8 m/s^2.

Solución:

El valor de la intensidad del campo gravitatorio en la superficie de un planeta viene dado por:

$$g = G\,\frac{M}{R^2}$$

Aplicándolo a la Tierra y al planeta considerado:

$$\left.\begin{aligned} g_T &= G\,\frac{M_T}{R_T^2} \\ g_P &= G\,\frac{M_P}{R_P^2} \end{aligned}\right\} \frac{g_T}{g_P} = \frac{M_T\,R_P^2}{M_P\,R_T^2} = \frac{\cancel{M_T}\,4\cancel{R_T^2}}{3\cancel{M_T}\,\cancel{R_T^2}} = \frac{4}{3}\,;\; g_P = \frac{3}{4}g_T = \frac{3}{4}\,9{,}8\,\frac{m}{s^2} = 7{,}4\,\frac{m}{s^2}$$

(Oviedo. 2014-2015/ 7.1)

Determina a qué altura sobre la superficie de la Tierra la intensidad del campo gravitatorio es un 25% de su valor sobre la superficie terrestre.

DATOS: g_0= 9,8 m/s^2; R_T= 6370 km; M_T= 5,97 10^{24} kg

Solución:

Teniendo en cuenta el valor de la intensidad del campo gravitatorio en le superficie de la Tierra:

$$g_0 = G\,\frac{M_T}{R_T^2}$$

A una altura h sobre su superficie, valdría: $g = G\,\dfrac{M_T}{(R_T+h)^2} = \dfrac{g_0}{4}$

Combinando ambas expresiones:

$$\left.\begin{aligned} g &= G\,\frac{M_T}{(R_T+h)^2} \\ g_0 &= G\,\frac{M_T}{{R_T}^2} \end{aligned}\right\} \frac{g}{g_0} = \frac{{R_T}^2}{(R_T+h)^2}\,;\; \frac{(R_T+h)}{R_T} = \sqrt{\frac{g_0}{g}} = \sqrt{\frac{g_0}{\frac{g_0}{4}}} = 2$$

$$R_T + h = 2\,R_T\,;\; h = R_T = 6370\text{ km}$$

(Oviedo. 2014-2015/ 5.1)

La aceleración de la gravedad en la superficie de Marte es 3,7 m/s^2. Si el radio de la Tierra es de 6370 km y la masa de Marte 0,11 veces la de la Tierra, calcula:

a) El radio de Marte.
b) La velocidad de escape desde la superficie de Marte.
c) El peso en dicha superficie de un astronauta de 70 kg de masa.

DATOS: g_0= 9,8 m/s^2

Solución:

a)

$$\left.\begin{aligned} g_0 &= G\,\frac{M_T}{R_T^2} \\ g_M &= G\,\frac{M_M}{R_M^2} \end{aligned}\right\} \frac{g_0}{g_M} = \frac{M_T\,R_M^2}{M_M\,R_T^2} = \frac{\cancel{M_T}\,R_M^2}{0{,}11\cancel{M_T}\,R_T^2}\,;\; R_M = R_T\sqrt{0{,}11\,\frac{g_0}{g_M}} = 6370\text{ km}\sqrt{0{,}11\,\frac{9{,}8\,\frac{\cancel{m}}{\cancel{s^2}}}{3{,}7\,\frac{\cancel{m}}{\cancel{s^2}}}} = 3438\text{ km}$$

b)
$$\left.\begin{array}{l} v_e = \sqrt{\dfrac{2\,G\,M}{r}};\ v_{e(M)} = \sqrt{\dfrac{2\,G\,M_M}{R_M}} \\ g_M = \dfrac{G\,M_M}{R_M^2};\ G\,M_M = g_M\,R_M^2 \end{array}\right\} v_{e(M)} = \sqrt{\dfrac{2\,g_M\,R_M^{\cancel{2}}}{\cancel{R_M}}} = \sqrt{2\,g_M\,R_M}$$

$$v_{e(M)} = \sqrt{2\,g_M\,R_M} = \sqrt{2\,.3{,}7\,\frac{m}{s^2}\,3{,}44\,10^6 m} = 5045\,\frac{m}{s} = 5{,}1\,\frac{km}{s} = 18\,360\,\frac{km}{h}$$

c) $P = m\,g_M = 70\,kg\,3{,}7\,\dfrac{m}{s^2} = 259\,N$

(Oviedo. 2014-2015/ 4.1)

Determina a qué altura sobre la superficie de la Tierra la aceleración gravitatoria se reduce a la mitad sobre la superficie terrestre.

DATOS: g_0= 9,8 N/kg; R_T= 6370 km.

Solución:

Teniendo en cuenta el valor de la intensidad del campo gravitatorio en le superficie de la Tierra:
$$g_0 = G\,\frac{M_T}{R_T^2}$$
A una altura h sobre su superficie, valdría: $g = G\,\dfrac{M_T}{(R_T+h)^2} = \dfrac{g_0}{2}$

Combinando ambas expresiones:
$$\left.\begin{array}{l} g = G\,\dfrac{M_T}{(R_T+h)^2} \\ g_0 = G\,\dfrac{M_T}{R_T{}^2} \end{array}\right\} \frac{g}{g_0} = \frac{R_T{}^2}{(R_T+h)^2};\ \frac{(R_T+h)}{R_T} = \sqrt{\frac{g_0}{g}} = \sqrt{\frac{g_0}{\frac{g_0}{2}}} = \sqrt{2}$$
$$R_T + h = \sqrt{2}\,R_T\ ;\ h = (\sqrt{2}-1)\,R_T = (\sqrt{2}-1)\,6370\,km = 2639\,km$$

(Oviedo. 2014-2015/ 3.1)

Dos chicas trabajan pilotando cohetes espaciales. Carmen es la capitana de un cohete que describe una órbita circular alrededor de la Tierra y tarda 1 h y 30 min en dar una vuelta completa alrededor de la misma. María pilota otro cohete que también describe una órbita circular alrededor de la Tierra, pero que tarda 1 h en dar una vuelta alrededor de esta.

Blanca trabaja en el centro de control y quiere determinar la distancia mínima a la que están separadas las naves de Carmen y María cuando están alineadas y se da cuenta que coincide con la diferencia de radios de las dos órbitas. ¿Cuál es el valor de la distancia mínima a la que están separadas ambas naves cuando están alineadas?

DATOS: G= 6,67 10^{-11} Nm^2/kg^2; M_T= 5,98 10^{24} kg

Solución:

$$T^2 = k\,r^3\ ;\ r = \sqrt[3]{\frac{T^2}{k}}$$
$$d_m = r_C - r_M = \sqrt[3]{\frac{T_C^2}{k}} - \sqrt[3]{\frac{T_M^2}{k}} = \sqrt[3]{\frac{1}{k}}\left(\sqrt[3]{T_C^2} - \sqrt[3]{T_M^2}\right) = \sqrt[3]{\left(\frac{GM_T}{4\pi^2}\right)}\left(\sqrt[3]{T_C^2} - \sqrt[3]{T_M^2}\right)$$
$$d_m = \sqrt[3]{\left(\frac{6{,}67\,.10^{-11}\,\frac{N\,m^2}{kg^{\cancel{2}}}\,5{,}98\,/\,9\,.10^{24}\,\cancel{kg}}{4\pi^2}\right)}\left(\sqrt[3]{5400^2\,s^2} - \sqrt[3]{3600^2 s^2}\right) = 1\,575\,974\,m = 1576\,km$$

(Oviedo. 2013-2014/ 7.1)

Un trozo de chatarra espacial de 25 kg que se dirige directo hacia la Tierra, en caída libre, tiene una velocidad de 10 m/s a una altura sobre la superficie terrestre de 300 km. Calcula:

a) El peso del trozo de chatarra a dicha altura.
b) La energía mecánica del trozo de chatarra a esa altura.
c) La velocidad con la que impactará sobre la superficie terrestre despreciando la fricción con la atmósfera.

DATOS: G= 6,67 10^{-11} Nm^2/kg^2; M_T= 5,98 10^{24} kg; R_T= 6370 km

Solución:

a) Calculando el valor de la gravedad a esa altura, el peso será:

$$g = G\ \frac{M_T}{(R_T + h)^2} = 6{,}67\,.10^{-11}\,\frac{N\,\cancel{m^2}}{kg\cancel{^2}}\,\frac{5{,}98\,.10^{24}\,\cancel{kg}}{\left(6{,}670\,.10^{6}\right)^2\,\cancel{m^2}} = 8{,}97\,\frac{m}{s^2}$$

$$P = m\,g = 25\,kg\,.8{,}97\,\frac{m}{s^2} = 224\,N$$

b) Suponiendo una órbita circular la energía mecánica (suma de cinética más potencial) es igual a la mitad de la energía potencial:

$$E_{mec} = \frac{1}{2}\,Ep = -\frac{1}{2}\,\frac{G\,M_T\,m}{r} = -\frac{1}{2}\,\frac{6{,}67\,10^{-11}\,\frac{N\,m\cancel{^2}}{\cancel{kg^2}}\,5{,}98\,10^{24}\,\cancel{kg}\;25\,\cancel{kg}}{6{,}670\,10^{6}\,\cancel{m}} = -\,7{,}48\,10^{8}\ J$$

c) Cuando llegue a la superficie de la Tierra tendrá una energía potencial de:

$$Ep = -\,\frac{G\,M_T\,m}{r} = -\,\frac{6{,}67\,10^{-11}\,\frac{N\,m\cancel{^2}}{\cancel{kg^2}}\,5{,}98\,10^{24}\,\cancel{kg}\;25\,\cancel{kg}}{6{,}370\,10^{6}\,\cancel{m}} = -\,1{,}57\,10^{9}\ J$$

Haciendo un balance de energía considerando que el punto 1 (de partida) está situado a una altura de 300 km y que el punto 2 (de llegada) se sitúa sobre la superficie terrestre, y considerando que no hay rozamiento, luego la única fuerza que realiza trabajo es la de gravedad ***que es conservativa***:

$$Ec_1 + Ep_1 = Ec_2 + Ep_2\ ;\ Ec_2 = Ec_1 + Ep_1 - Ep_2 = E_{Mec1} - Ep_2\ ;\ v = \sqrt{\frac{2\left(E_{Mec1} - Ep_2\right)}{m}}$$

$$v = \sqrt{\frac{2\left(E_{Mec1} - Ep_2\right)}{m}} = \sqrt{\frac{2\left(-7{,}48\,.10^{8} + 1{,}57\,10^{9}\right)J}{25\,kg}} = 8109\,\frac{m}{s} = 8{,}1\,\frac{km}{s} = 29\,160\,\frac{km}{h}$$

Oviedo. 2013-2014/ 6.1)

Un satélite artificial describe una órbita circular de 2 R_T: en torno a la Tierra. Si en la superficie de la Tierra pesa 5000 N. Calcula:

a) La velocidad orbital del satélite en su movimiento.
b) El peso del satélite en órbita.

DATOS: G= 6,67 10^{-11} Nm^2/kg^2; R_T= 6370 km; g_0= 9,8 m/s^2

Solución:

a)
$$\left.\begin{aligned} v_o &= \sqrt{\frac{GM_T}{r}} \\ g_0 &= G\,\frac{M_T}{R_T^2}\ ;\ G\,M_T = g_0\,R_T^2 \end{aligned}\right\}\ v_o = \sqrt{\frac{g_0\,R_T^{\cancel{2}}}{2\,\cancel{R_T}}} = \sqrt{\frac{g_0\,R_T}{2}}$$

$$v_o = \sqrt{\frac{g_0\,R_T}{2}} = \sqrt{\frac{9{,}8\,\frac{m}{s^2}\,6{,}370\,.10^{6}m}{2}} = 5586\,\frac{m}{s} = 5{,}6\,\frac{km}{s} = 20\,160\,\frac{km}{h}$$

b) El valor de la gravedad a una altura h = 2 R_T será:

$$g = G\,\frac{M_T}{(R_T+h)^2} = G\,\frac{M_T}{(3\,R_T)^2} = 6{,}67\,.10^{-11}\,\frac{N\,\cancel{m^2}}{kg\cancel{^2}}\,\frac{5{,}98\,.10^{24}\,\cancel{kg}}{\left(3\,.6{,}370\,.10^6\right)^2\,\cancel{m^2}} = 2{,}46\,\frac{m}{s^2}$$

Comparando los pesos en la superficie de la Tierra y en la órbita:

$$\left.\begin{aligned} P_h &= m\,g \\ P_0 &= m\,g_0 \end{aligned}\right\} \frac{P_h}{P_0} = \frac{g}{g_0};\ P_h = P_0\,\frac{g}{g_0} = 5000\,N\,\frac{2{,}46\,\frac{\cancel{m}}{\cancel{s^2}}}{9{,}8\,\frac{\cancel{m}}{\cancel{s^2}}} = 1255\,N$$

Oviedo. 2013-2014/ 5.1)

Un satélite tiene una masa m= 500 kg y su órbita, supuesta circular, se encuentra a una distancia de 2,32 10^4 km de la superficie terrestre. Determina:

a) Las energías potencial y cinética del satélite en su órbita.
b) El periodo del movimiento orbital.
c) La energía mínima para ponerlo en órbita y la velocidad de escape de la misma.

DATOS: G= 6,67 10^{-11} Nm^2/kg^2; R_T= 6,38 10^6 m; M_T= 5,97 10^{24} kg

Solución:

a) Para una órbita circular la energía cinética es igual a la mitad del valor absoluto de la energía potencial:

$$r = R_T + h = \left(6{,}38\,.10^6 + 2{,}32\,.10^7\right)m = 2{,}96\,.10^7 m$$

$$Ep = -\,G\,\frac{M_T\,m}{r} = -\,6{,}67\,10^{-11}\,\frac{N\,m\cancel{^2}}{\cancel{kg}^2}\,\frac{5{,}97\,10^{24}\,\cancel{kg}\,500\,\cancel{kg}}{2{,}96\,10^7\,\cancel{m}} = -\,6{,}73\,10^9\,J$$

$$Ec = \frac{1}{2}\left|Ep\right| = \frac{1}{2}\,6{,}73\,.10^9\,J = 3{,}37\,.10^9\,J$$

b) $r = R_T + h = \left(6{,}38\,.10^6 + 2{,}32\,.10^7\right)m = 2{,}96\,.10^7 m$

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM_T}\right) r^3;\ T = \sqrt{\left(\frac{4\pi^2}{6{,}67\,.10^{-11}\,\frac{N\,m^2}{kg^2}\,5{,}97\,.10^{24} kg}\right)(2{,}96\,.10^7)^3 m^3} = 50\,707\ s = 14\ h\ 5 min\ 7\ s$$

c) La energía para ponerlo en órbita (sin considerar pérdidas debido al rozamiento con la atmósfera) vendrá dada por la energía total de la órbita, que si se considera circular será la mitad de la energía potencial, menos la energía potencial que tiene en la superficie de la Tierra.

Energía total en la órbita:

$$E_2 = E_{Tot} = Ep + Ec = \frac{1}{2}\,Ep = \frac{1}{2}\,(-\,6{,}73\,.109)J = -\,3{,}37.10^9\,J$$

Energía potencial en la superficie de la Tierra:

$$E_1 = Ep = -\,G\,\frac{M_T\,m}{r} = -\,6{,}67\,10^{-11}\,\frac{N\,m\cancel{^2}}{\cancel{kg}^2}\,\frac{5{,}97\,10^{24}\,\cancel{kg}\,500\,\cancel{kg}}{6{,}38\,10^6\,\cancel{m}} = -\,3{,}12\,10^{10}\,J$$

Diferencia de energía (energía necesaria para ponerlo en la órbita):

$$\Delta E = E_2 - E_1 = \left(-\,3{,}37\,10^9 + 3{,}12\,10^{10}\right)J = 2{,}78\,10^{10}\ J$$

Velocidad de escape:

$$v_e = \sqrt{\frac{2\,G\,M}{r}} = \sqrt{\frac{2\ .6{,}67\,.10^{-11}\,\frac{N\,m^2}{kg\cancel{^2}}\,5{,}97\,.10^{24}\,\cancel{kg}}{2{,}96\,.10^7 m}} = 5187\,\frac{m}{s} = 5{,}19\,\frac{km}{s} = 18\,684\,\frac{km}{h}$$

Oviedo. 2013-2014/ 4.1)

Con ayuda de los datos que se facilitan determina el valor de la aceleración de la gravedad en la superficie de la Luna, a partir del valor de la misma en la superficie terrestre.

DATOS: M_L= 0,012 M_T ; R_L= 0,27 R_T; aceleración gravedad en la superficie de la Tierra:g_0=9,8 m/s^2

Solución:

$$\left.\begin{aligned} g_0 &= G\,\frac{M_T}{R_T^2} \\ g_L &= G\,\frac{M_L}{R_L^2} \end{aligned}\right\} \frac{g_L}{g_0} = \frac{M_L\,R_T^2}{M_T\,R_L^2} = \frac{0{,}012\,\cancel{M_T}\,\cancel{R_T^2}}{\cancel{M_T}\,0{,}27^2\,\cancel{R_T^2}};\ g_L = g_0\,\frac{0{,}012}{0{,}27^2} = 9{,}8\,\frac{m}{s^2}\,0{,}162 = 1{,}6\,\frac{m}{s^2}$$

(Oviedo. 2013-2014/ 3.1)

Un cohete de 3500 kg de masa despega de la superficie de la Tierra con una velocidad de 25 km/s.

a) Calcula la energía mecánica total considerando que la energía potencial es cero a distancias muy largas y despreciando la fuerza de rozamiento debida a la atmósfera.
b) Determina si el cohete escapará de la atracción gravitatoria terrestre y, en caso afirmativo, calcula la velocidad que tendrá el cohete cuando se encuentre muy lejos de la Tierra.

DATOS: g_0=9,8 m/s^2; R_T= 6370 km

Solución:

a) La energía mecánica será la suma de la energía cinética más la potencial en la superficie de la Tierra:

$$E_c = \frac{1}{2}\,m\,v^2 = \frac{1}{2}\,3500\,kg\,(2{,}5\,.10^4)^2\,\frac{m^2}{s^s} = 1{,}1.10^{12}\,J$$

$$\left.\begin{aligned} Ep &= -\,G\,\frac{M_T\,m}{R_T} \\ g_0 &= G\,\frac{M_T}{R_T^2};\ GM_T = g_0 R_T^2 \end{aligned}\right\} Ep = -\,\frac{g_0 R_T^{\cancel{2}}\,m}{\cancel{R_T}} = -\,m\,g_0\,R_T$$

$$Ep = -\,3500\,kg\,9{,}8\,\frac{m}{s^2}\,6{,}38\,10^6\,m = -\,2{,}2\,10^{11} J$$

$$E_1 = E_c + E_p = \left(1{,}1.10^{12} - 2{,}2\,.10^{11}\right)J = 8{,}8\,.10^{11}\,J$$

b) Para que el cohete escape de la atracción gravitatoria terrestre habrá que comunicarle como mínimo la velocidad de escape dada por:

$$v_e = \sqrt{\frac{2\,G\,M}{r}} = \sqrt{2\,g_0\,R_T}\sqrt{2\ \ .9{,}8\,\frac{m}{s^2}\,6{,}38\,.10^6 m} = 11182\,\frac{m}{s}\,11{,}2\,\frac{km}{s} = 40\,320\,\frac{km}{h}$$

Como se le comunica una velocidad de 25 km/s, ***dicha velocidad será suficiente para que escape de la atracción gravitatoria de la Tierra*** y cuando esto suceda (Ep=0), tendrá una velocidad que se puede calcular a partir de:

$$Ec_1 + Ep_1 = Ec_2 + Ep_2\,;Ec_2 = Ec_1 + Ep_1 - Ep_2\ = Ec_1 + Ep_1 - 0 = E_1$$

$$\frac{1}{2}\,m\,v^2 = E_1\,;v = \sqrt{\frac{2\,E_1}{m}} = \sqrt{\frac{2\,.\,8{,}8\,.10^{11} J}{3500\,kg}}\ = 22\,424\,\frac{m}{s} = 22{,}4\,\frac{km}{s}$$

(Oviedo. 2013-2014/ 2.1)

En la superficie de la Luna el periodo de un péndulo simple de 1 m de longitud es T=4,7 s. Si el radio de la Luna es R_L=1738 km., determina:

a) El valor de la gravedad en la superficie lunar.
b) La velocidad de escape de la superficie de la Luna.

Solución:

a) El valor del periodo de un péndulo simple viene dado por: $T = 2\,\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

Por tanto: $g = 4\,\pi^2\,L = 4\,\pi^2\,\frac{1\,m}{4,7^2\,s^2} = 1,8\,\frac{m}{s^2}$

b) $$v_e = \sqrt{\frac{2\,G\,M}{r}} = \sqrt{2\,g_L\,R_L} = \sqrt{2\;.1,8\,\frac{m}{s^2}\,1,738\,.10^6 m} = 2501\,\frac{m}{s} = 2,5\,\frac{km}{s} = 9000\,\frac{km}{h}$$

(Oviedo. 2013-2014/ 1.1)

a) Si la masa de la Luna es 1/81 la masa de la Tierra y su radio 3/11 el radio terrestre, determina el valor de *g* en la Luna.
b) ¿Cuánto pesaría en la Luna un cuerpo de 70 kg de masa? ¿Cuál debe ser el valor de la masa de un cuerpo para que pese en la Luna 500 N?

DATOS: En la Tierra: g_0=9,8 m/s^2

Solución:

a)
$$\left.\begin{aligned} g_0 &= G\,\frac{M_T}{R_T^2} \\ g_L &= G\,\frac{M_L}{R_L^2}\end{aligned}\right\}\frac{g_L}{g_0} = \frac{M_L\,R_T^2}{M_T\,R_L^2} = \frac{\frac{1}{81}\cancel{M_T}\,\cancel{R_T^2}}{\cancel{M_T}\left(\frac{3}{11}\right)^2\cancel{R_T^2}};\; g_L = g_0\,\frac{11^2}{3^2\,.81} = 9,8\,\frac{m}{s^2}0,166 = 1,6\,\frac{m}{s^2}$$

$$P_L = m\,g_L = 70\,kg\,1,6\,\frac{m}{s^2} = 112\,N$$

$$P_L = m\,g_L\,;\,m = \frac{P_L}{g_L} = \frac{500\,N}{1,6\,\frac{m}{s^2}} = 312,5\,kg$$

Oviedo. 2012-2013/ 8.1)

Considera un satélite artificial que da dos vueltas alrededor de la Tierra cada 24 h en una órbita circular.

a) Calcula la altura a la que se encuentra sobre la superficie terrestre.
b) Determina la velocidad del satélite

DATOS: G= 6,67 10^{-11} Nm^2/kg^2; R_T= 6370 km; M_T= 5,97 10^{24} kg

Solución:

a) $$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM_T}\right)r^3\,;\,r = \sqrt[3]{\frac{G\,M_T T^2}{4\pi^2}}\quad (T = 12\quad h = 43\,200\,s)$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{6,67\,.10^{-11}\,\frac{N\,m^2}{kg^2}\,5,97\,.10^{24}kg\;\,(4,32\,.10^4)^2 s^2}{4\pi^2}} = 2,66\,.10^7 m = 26\,600\,km$$

$$r = h + R_T\,;\,h = r - R_T = (26\,600 - 6370)\,km = 20\,220\,km$$

b) $$v_o = \sqrt{\frac{G\,M}{r}} = \sqrt{\frac{6,67\,.10^{-11}\,\frac{N\,m^2}{kg^{\cancel{2}}}\,5,97\,.10^{24}\,\cancel{kg}}{2,66\,.10^7 m}} = 3869\,\frac{m}{s} = 3,9\,\frac{km}{s} = 14\,040\,\frac{km}{h}$$

Oviedo. 2012-2013/ 7.1)

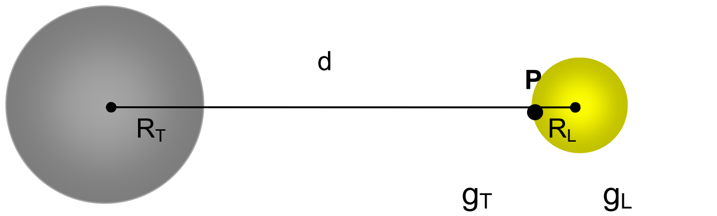
Considera la Tierra y la Luna como esferas de radio R_T= 6,4 10^6 m y R_L= 1,7 10^6 m, respectivamente y que la distancia entre los centros de la Tierra y la Luna sea d=3,8 10^8 m.

a) Compara en este caso el valor de la intensidad del campo gravitatorio creado por la Luna en un punto P de la superficie lunar con el valor del campo gravitatorio creado por la Tierra en ese mismo punto. Supón que el punto está situado en la línea que une el centro de la Luna con el de la Tierra.
b) Comenta el resultado y, a la vista del mismo, indica si es lógico despreciar alguno de los valores calculados en el punto.

DATOS: G= 6,67 10^{-11} Nm^2/kg^2; M_T= 5,97 10^{24} kg; M_L= 7,35 10^{22} kg.

Solución:

a) A la hora de hacer los cálculos hemos de tener en cuenta (ver dibujo) que la distancia entre la Tierra y el punto P es r = d - R_L



$$\left.\begin{aligned} g_T &= G\,\frac{M_T}{r^2} \\ g_L &= G\,\frac{M_L}{R_L^2} \end{aligned}\right\} \frac{g_T}{g_L}=\frac{M_T\,R_L^2}{M_L\,r^2}=\frac{5{,}97\,.10^{24}\,\cancel{kg}\,(1{,}7\,.10^6)^2\,\cancel{m^2}}{7{,}35\,.10^{22}\,\cancel{kg}\,(3{,}8\,.10^8)^2\,\cancel{m^2}};\ \boxed{g_T=1{,}6\,.10^{-3}\,g_L}$$

b) Como resultado del cálculo podemos ver que el campo creado por la Tierra es de poco más de una milésima del creado por la Luna y, dado que los datos están dados con tres cifras significativas,, puede despreciarse sin cometer un error importante.

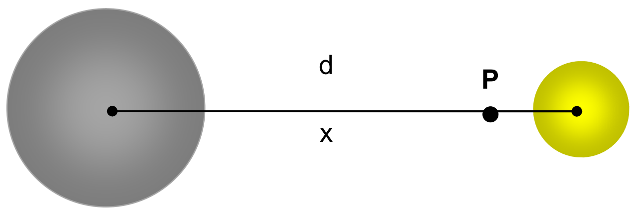
Oviedo. 2012-2013/ 6.1)

Determina razonablemente a qué distancia de la Tierra se cancela la fuerza total ejercida por la Luna y la Tierra sobre un cuerpo situado en la misma.

DATOS: La masa de la Tierra es aproximadamente 81 veces la de la Luna, es decir: M_T=81 M_L; distancia media Tierra-Luna d=3,84 10^8 m.

Solución:

Debido a que la fuerza gravitatoria de la Tierra es mucho mayor que la de la Luna el punto buscado ha de estar más próximo a la Luna. Consideremos que el punto buscado está a una distancia x medida desde la Tierra (ver dibujo):



$$\left.\begin{aligned} F_T &= G\,\frac{m\,M_T}{x^2} \\ F_L &= G\,\frac{m\,M_L}{(d-x)^2} \end{aligned}\right\} G\,\frac{\cancel{m}\,M_T}{x^2}=G\,\frac{\cancel{m}\,M_L}{(d-x)^2};\left(\frac{d-x}{x}\right)^2=\frac{M_L}{M_T};\ \frac{d-x}{x}=\sqrt{\frac{M_L}{M_T}}=\sqrt{\frac{\frac{M_T}{81}}{M_T}}=\sqrt{\frac{1}{81}}=\frac{1}{9}$$

$$\frac{d-x}{x}=\frac{1}{9};\ \boxed{x=\frac{9}{10}d}\ \ x=\frac{9}{10}3{,}84\,.10^5\,km=3{,}46\,.10^5\,km$$

Oviedo. 2012-2013/ 5.1)

Una sonda espacial de 250 kg de masa se encuentra describiendo una órbita circular alrededor de la Luna a una altura de 180 km de su superficie. Calcula:

a) La velocidad orbital de la sonda.
b) El valor de su energía mecánica

DATOS: G= 6,67 10^{-11} Nm^2/kg^2; R_L= 1740 km; M_L= 7,4 10^{22} kg.

Solución:

a)
$$r = R_L + h = (1740+180)\,km = 1920\,km = 1{,}92\,.10^6\,m$$

$$v_o = \sqrt{\frac{G\,M}{r}} = \sqrt{\frac{6{,}67\,.10^{-11}\,\frac{N\,m^2}{kg^{\cancel{2}}}\,7{,}4\,.10^{22}\,\cancel{kg}}{1{,}92\,.10^6\,m}} = 1603\,\frac{m}{s} = 1{,}6\,\frac{km}{s} = 5760\,\frac{km}{h}$$

b)
$$E_{mec} = \frac{1}{2}\,Ep = -\frac{1}{2}\,\frac{G\,M_L\,m}{r} = -\frac{1}{2}\,\frac{6{,}67\,10^{-11}\,\frac{N\,m^{\cancel{2}}}{\cancel{kg^2}}\,7{,}4\,10^{22}\,\cancel{kg}\,250\,\cancel{kg}}{1{,}92\,10^6\,\cancel{m}} = -\,3{,}2\,10^8\,J$$

Oviedo. 2012-2013/ 4.1)

Calcula el periodo de giro de la Luna en su movimiento circular alrededor de la Tierra.

DATOS: M_L= 7,35 10^{22} kg; M_T= 5,97 10^{24} kg; distancia media Tierra-Luna d=3,84 10^8 m.

Solución:

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM_T}\right)r^3;\; T = \sqrt{\left(\frac{4\pi^2}{6{,}67\,.10^{-11}\,\frac{N\,m^2}{kg^2}\,5{,}97\,.10^{24}\,kg}\right)(3{,}84\,.10^8)^3\,m^3} = 2{,}37\,.10^6\,s = 27{,}4\text{ días}$$

Oviedo. 2012-2013/ 3.1)

Un satélite artificial de 500 kg de masa se lanza desde la superficie terrestre hasta situarlo en una órbita circular situada a una altura h= 1200 km sobre la superficie de la Tierra. Determina:

a) La intensidad del campo gravitatorio terrestre en cualquier punto de la órbita descrita por el satélite.
b) La velocidad del satélite cuando se encuentre en dicha órbita.

DATOS: M_T= 5,97 10^{24} kg; R_T= 6,40 10^6 m; G= 6,67 10^{-11} Nm^2/kg^2

Solución:

a)
$$g = G\,\frac{M_T}{(R_T+h)^2} = 6{,}67\,.10^{-11}\,\frac{N\,\cancel{m^2}}{kg^{\cancel{2}}}\,\frac{5{,}97\,.10^{24}\,\cancel{kg}}{\left(7{,}6\,.10^6\right)^2\,\cancel{m^2}} = 6{,}89\,\frac{m}{s^2}$$

b)
$$r = R_T + h = (6400+1200)\,km = 7600\,km = 7{,}60\,.10^6\,m$$

$$v_o = \sqrt{\frac{G\,M}{r}} = \sqrt{\frac{6{,}67\,.10^{-11}\,\frac{N\,m^2}{kg^{\cancel{2}}}\,5{,}97\,.10^{24}\,\cancel{kg}}{7{,}6\,.10^6\,m}} = 7238\,\frac{m}{s} = 7{,}2\,\frac{km}{s} = 25\,920\,\frac{km}{h}$$

Oviedo. 2012-2013/ 2.1)

Considera dos masas de 5000 kg y 3000 kg respectivamente, separadas una distancia de 8 m, Calcula:

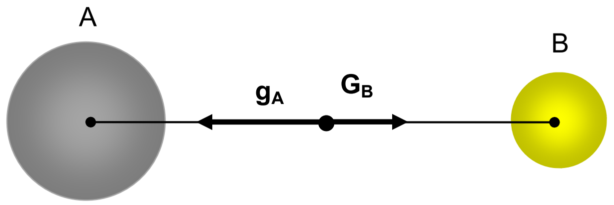
a) El módulo de la fuerza de atracción entre ambas.
b) El valor del campo gravitatorio total en el punto medio de la recta que las une.

DATOS: G= 6,67 10^{-11} Nm^2/kg^2

Solución:

a) $$F = G\,\frac{M\,m}{r^2} = 6{,}67\,.10^{-11}\,\frac{N\,\cancel{m^2}}{kg^{\cancel{2}}}\,\frac{5\,.10^3\,\cancel{kg}\;\;3\,.10^3\,\cancel{kg}}{8^2\,\cancel{m^2}} = 1{,}56\,10^{-5}\,N$$

b)



$$\left.\begin{aligned} g_A &= G\,\frac{M_A}{r^2} \\ g_B &= G\,\frac{M_B}{r^2} \end{aligned}\right\} g_{Tot} = g_A - g_B = \frac{G}{r^2}(M_A - M_B) = \frac{6{,}67\,.10^{-11}\,\frac{N\,\cancel{m^2}}{kg^{\cancel{2}}}}{8^2\,\cancel{m^2}}(5000-3000)\,\cancel{kg} = 8{,}34\,.10^{-9}\,\frac{N}{kg}$$

Oviedo. 2012-2013/ 1.1)

Calcular razonadamente el valor de la intensidad del campo gravitatorio en la superficie de un planeta cuya masa es 5 veces la masa da la Tierra y su radio 4 veces el radio terrestre.

DATOS: g_0= 9,8 N/kg

Solución:

$$\left.\begin{aligned} g_0 &= G\,\frac{M_T}{R_T^2} \\ g_P &= G\,\frac{M_P}{R_P^2} \end{aligned}\right\} \frac{g_P}{g_0} = \frac{M_P\,R_T^2}{M_T\,R_P^2} = \frac{5\,\cancel{M_T}\;\cancel{R_T^2}}{\cancel{M_T}\;4^2\,\cancel{R_T^2}} = \frac{5}{16}\,;\quad \boxed{g_P = \frac{5}{16}\,g_0}$$

$$g_P = \frac{5}{16}\,9{,}8\,\frac{m}{s^2} = 3{,}1\,\frac{m}{s^2}$$