	Movimiento oscilatorio Movimiento armónico simple (MAS) Dinámica	IES La Magdalena. Avilés. Asturias

La aceleración de un punto que oscila con MAS puede expresarse como:

$\boxed{a = -A\,\omega^2 \text{sen}\,(\omega t)}$ En función del tiempo.

$\boxed{a = -\omega^2 x}$ En función de la distancia al origen.

Por tanto, ***un cuerpo de masa m que oscile con MAS estará sometido a una fuerza que varía con el tiempo en la forma:***

$$\boxed{F = m\,a = -A\,m\omega^2 \text{sen}\,(\omega t) = -A\,k\,\text{sen}\,(\omega t)}$$

Si elegimos como variable la distancia al origen (x) podemos expresar la fuerza actuante como:

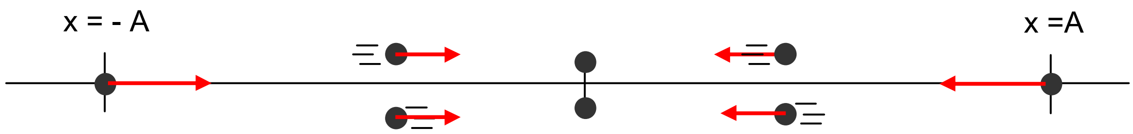
$$\boxed{F = m\,a = -m\,\omega^2 x = -k\,x}$$

Donde $\boxed{k = m\,\omega^2}$

Generalmente esta es la forma más usada y nos indica que ***en un MAS la fuerza es proporcional al desplazamiento y opuesta a él.***

Cuando el punto se coloque a la derecha del origen (en movimiento de ida o de vuelta), la fuerza apunta hacia la izquierda; mientras que cuando esté a la izquierda, la fuerza apunta hacia la derecha.

Es decir la fuerza apunta siempre hacia el origen (punto de equilibrio)



La constante k recibe el nombre de ***constante elástica*** y se mide en N/m en el S.I.

La constante elástica en el caso de muelles permite cuantificar "la dureza" del mismo. Muelles "muy duros" (que cuesta trabajo estirarlos) tienen una constante elástica elevada, mientras que los muelles "blandos" (los que se estiran con facilidad) tienen constantes elásticas pequeñas.

A partir de la ecuación de definición de la constante elástica, k (ver más arriba), podemos relacionar periodo (o frecuencia) de oscilación con k:

$$k = m\,\omega^2 = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = m\frac{4\pi^2}{T^2}$$

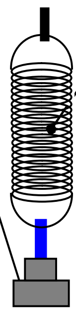
$$\boxed{T = \sqrt{\frac{4\pi^2}{k}m} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$$

$$\boxed{f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}}$$

El periodo de oscilación de un cuerpo colgado de un resorte depende de la masa del cuerpo y de la constante elástica del resorte. Para un mismo cuerpo el periodo será mayor (oscilará más lentamente) cuanto menor sea la constante elástica (cuanto "más blando" sea el muelle).

Si se aumenta la masa del cuerpo las oscilaciones serán más lentas (mayor periodo).

Una masa menor provocará una disminución del periodo de oscilación (oscilaciones más rápidas)



Un muelle blando producirá un movimiento oscilatorio con un periodo largo (oscilación más lenta).

Un muelle duro provocará que las oscilaciones sean más rápidas (periodo corto)

Más información en ***FisQuiWeb***: Laboratorio Física 2º Bachillerato, *Estudio de un muelle real.*

Ejemplo 1 (Oviedo, 2000)

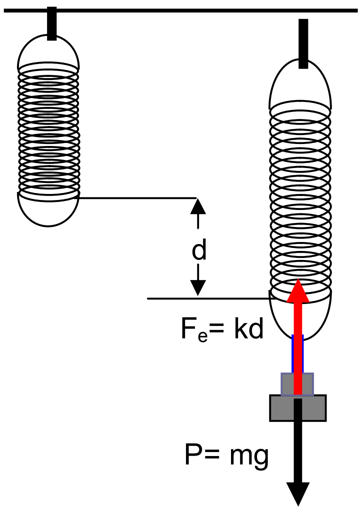
Se engancha un muelle de 30 cm de longitud y constante elástica 5,0 N cm^{-1} a un cuerpo de masa 2,0 kg, y el sistema se deja colgado del techo.

a) ¿En qué porcentaje se alargará el muelle?

b) Se tira ligeramente del cuerpo hacia abajo y se suelta, ¿cuál será el periodo de oscilación del sistema?

c) Se desengancha el muelle del techo y se fija a la pared, poniendo el muelle horizontal y el cuerpo sobre una mesa, siendo el coeficiente de rozamiento entre ambos despreciable. ¿Cuál será el nuevo periodo de oscilación?

Solución:



Cuando se cuelga el cuerpo el muelle se estira y ejerce una fuerza elástica hacia arriba igual a *kx* que equilibra el peso

$$F_e - P = 0;\ F_e = P$$

$$kd = mg\ ;\ d = \frac{mg}{k} = \frac{2,0\ \cancel{kg}\ 10\ m\ \cancel{s^{-2}}}{500\ \cancel{kg}\ \cancel{s^{-2}}} = 0,04\ m = 4,0\ cm$$

$$\text{Porcentaje}: \frac{4\ cm}{30\ \cancel{cm}}\frac{100\ \cancel{cm}}{100\ cm} = 13,3\frac{cm}{100\ cm} = 13,3\%$$

Una vez puesto en movimiento el sistema oscilará con un periodo:

$$T == 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{2,0\ \ \cancel{kg}}{500\ \cancel{kg}\ ms^{-2}}} = 0,40\ s$$

El periodo de oscilación de un muelle sólo depende de la masa del cuerpo y de su constante elástica, como ninguno de ellos varía al pasar de la posición vertical a la horizontal ***el periodo será el mismo.***

Ejemplo 2 (Oviedo, 2002)

Un bloque de 1,5 kg, colocado sobre una mesa y unido a un muelle de constante elástica k = 500 N/m, oscila sin rozamiento. La velocidad máxima que alcanza en su trayectoria es de 70 cm/s. Calcular:

a) La frecuencia de oscilación

b) La amplitud de la oscilación

Solución:

a) El periodo de oscilación viene dado por:

$$T == 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{1,5\ \ \cancel{kg}}{500\ \cancel{kg}\ ms^{-2}}} = 0,34\ s$$

$$\text{La frecuencia será}: f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0,34\ s} = 2,94\ s^{-1}$$

La velocidad máxima se alcanza cuando el cuerpo pasa por x = 0 (ver apuntes MAS I) y tiene una valor:

$$v_{MAX} = \omega A = \frac{2\pi}{T}A = 2\pi\ f\ A$$

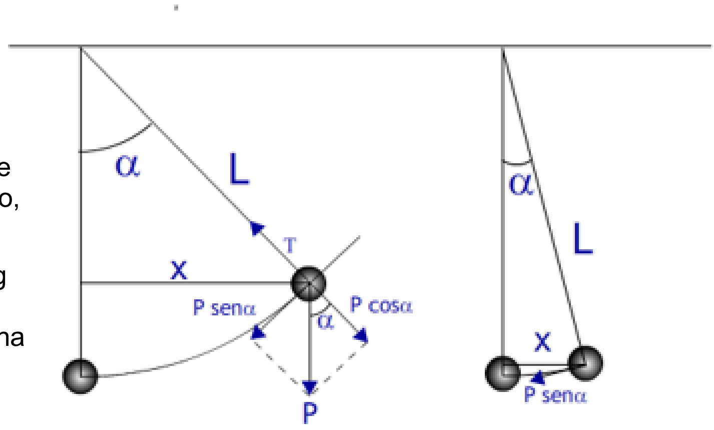
$$A = \frac{v_{MAX}}{2\pi\ f} = \frac{0,70\ m\cancel{s^{-1}}}{2\pi\ 2,94\ \cancel{s^{-1}}} = 0,038\ m = 3,8\ cm$$

El péndulo simple como oscilador armónico

Cuando un péndulo oscila la fuerza que lo impulsa es la componente del peso según la tangente (ver fig).

Si las oscilaciones tienen mucha amplitud el péndulo describe un arco. La trayectoria está bastante alejada de la propia de un MAS (sobre la recta x). El movimiento, aunque es oscilatorio, no puede considerarse armónico simple.

Si las oscilaciones tienen poca amplitud (ver fig de la derecha) la trayectoria seguida por el péndulo se aproxima bastante a la propia de una MAS, ya que entonces arco y cuerda se confunden. Además, la fuerza puede considerarse que apunta, con poco error, en la dirección de la recta x.



Podremos poner, por tanto:

$$F_x = P\,\text{sen}\,\alpha = -\,mg\,\frac{x}{L}$$

$$F_x = -\,mg\,\frac{x}{L}\ \text{(el signo menos indica que la fuerza se opone al desplazamiento, x)}$$

Comparando con :

$$F = -\,k\,x$$

Concluimos :

$$k\,\cancel{x} = mg\,\frac{\cancel{x}}{L}\ ;\ \boxed{k = \frac{mg}{L}}$$

Para pequeñas oscilaciones (ángulo inferior a 20 ^{0}) un péndulo simple se comporta como un oscilador armónico de constante k = mg/L

Operando podemos obtener el periodo de oscilación:

$$k = \frac{mg}{L}\ ;\ \cancel{m}\,\omega^2 = \frac{\cancel{m}\,g}{L}$$

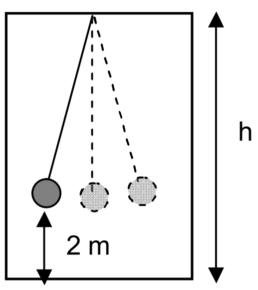
$$\frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{g}{L}\ ;\ \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}}$$

El periodo de un péndulo simple sólo depende de la longitud del péndulo.

Péndulos de longitudes grandes oscilaran lentamente (periodo elevado), mientras que péndulos cortos oscilarán rápidamente (periodos cortos)

Ejemplo 3 (Oviedo, 2007)

En una catedral hay una lámpara que cuelga desde el techo de una nave y que se encuentra situada a 2 m del suelo. Se observa que oscila levemente con una frecuencia de 0,1 Hz. ¿Cuál es la altura h de la nave?
Dato. g = 9, 8 m/s^2



El periodo de un péndulo simple depende únicamente de su longitud, por lo tanto para que las oscilaciones tengan una frecuencia de 0,1 Hz (T = 10 s) la longitud del péndulo deberá de ser:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

$$L = \frac{g}{4\pi^2}T^2 = \frac{9{,}8\ m\,\cancel{s^{-2}}}{4\pi^2}\,10^2\,\cancel{s^2} = 24{,}8\ m$$

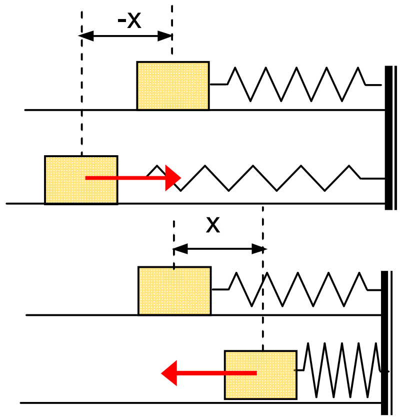
La nave tendrá, por tanto, una altura de:
24,8 m + 2,0 m = 26,8 m

Estudio energético del MAS

La fuerza elástica es una fuerza conservativa (ver apuntes *Energía II* de 1º de Bachillerato) ya que cuando realiza trabajo negativo resta energía cinética al cuerpo que se transforma en energía potencial elástica. La energía potencial acumulada puede volver a convertirse en energía cinética dejando que la fuerza elástica actúe (realizando trabajo positivo)

Por ser una fuerza conservativa se cumplirá:

$$\boxed{E_{c1} + E_{p1} = E_{c2} + E_{p2}}$$



En la figura superior el muelle se estira hacia la izquierda (comunicándole energía cinética). La fuerza elástica apunta entonces hacia la derecha y realiza trabajo negativo (restando energía cinética) que transforma en energía potencial elástica. Si ahora se suelta el muelle la fuerza elástica realiza trabajo positivo y la energía potencial se transforma en cinética.

La situación es similar si el muelle se comprime (figura inferior)

La energía potencial elástica vale: $\boxed{E_p = \frac{1}{2} k\, x^2}$

Tendrá su valor máximo en x = A y x = - A y un valor nulo en x =0

La energía cinética para un objeto que se mueva con MAS se puede escribir en función de la elongación en la forma:

$$Ec = \frac{1}{2} mv^2$$

$$\text{Como } v = \omega \sqrt{A^2 - x^2}$$

$$\boxed{Ec = \frac{1}{2} m\, \omega^2 \left(A^2 - x^2\right)}$$

La energía cinética adquiere un valor máximo para x = 0 y nulo para x =A

Si ahora sumamos las expresiones para la energía cinética y la potencial, observamos que la suma es una cantidad constante, lo que demuestra la interconversión de ambas formas de energía:

$$Ec = \frac{1}{2} m\, \omega^2 \left(A^2 - x^2\right)$$

$$Ep = \frac{1}{2} m\, \omega^2 x^2$$

$$Ec + Ep = \frac{1}{2} m\, \omega^2 \left(A^2 - x^2\right) + \frac{1}{2} m\, \omega^2 x^2 = \frac{1}{2} m\, \omega^2 A^2$$

$$\boxed{Ec + Ep = \frac{1}{2} m\, \omega^2 A^2 = \frac{1}{2} k\, A^2}$$

Ejemplo 4

Un cuerpo de 400 g oscila con MAS de ecuación: $x = 0,60\ \text{sen}\left(\frac{\pi}{0,60}\,t\right)$

a) Calcular los valores de la energía cinética y potencial cuando está a 0,50 y a 0,60 m del origen.

b) Comprobar que la suma de ambas energías permanece constante.

c) ¿En que punto de la trayectoria ambas energías (cinética y potencial) tendrán idéntico valor?

$\boxed{\text{A } 0,50 \text{ m del origen}}$

$$Ec = \frac{1}{2}\,m\,\omega^2\left(A^2 - x^2\right) = \frac{1}{2}\,0,400\ kg\left(\frac{\pi}{0,60}\right)^2 s^{-2}\left(0,60^2 - 0,50^2\right)m^2 = 0,603\ J$$

$$Ep = \frac{1}{2}\,m\,\omega^2 x^2 = \frac{1}{2}\,0,400\ kg\left(\frac{\pi}{0,60}\right)^2 0,50^2 m^2 = 1,371\ J$$

$$Ec + Ep = 0,603\ J + 1,371\ J = 1,974\ J$$

$\boxed{\text{A } 0,60 \text{ m del origen } (x = A)}$

$$Ec = \frac{1}{2}\,m\,\omega^2\left(A^2 - A^2\right) = 0$$

$$Ep = \frac{1}{2}\,m\,\omega^2 A^2 = \frac{1}{2}\,0,400\ kg\left(\frac{\pi}{0,60}\right)^2 0,60^2 m^2 = 1,974\ J$$

$$Ec + Ep = 0,000\ J + 1,974\ J = 1,974\ J$$

Según la expresión vista anteriormente la suma de la energía cinética y la potencial debe de ser constante e igual a 1/2 k A^2. Efectivamente:

$$Ec + Ep = \frac{1}{2}\,k\ A^2 = \frac{1}{2}\,m\,\omega^2 A^2 = \frac{1}{2}\,m\,\omega^2 A^2 = \frac{1}{2}\,0,400\ kg\left(\frac{\pi}{0,60}\right)^2 s^{-2}\,0,60^2 m^2 = 1,974\ J$$

Para saber en que punto las energía cinética y potencial tienen idéntico valor igualamos ambas:

$$Ec = \frac{1}{2}\,k\left(A^2 - x^2\right)$$

$$Ep = \frac{1}{2}\,kx^2$$

$$Ec = Ep\ ;\ \frac{1}{2}\,k\left(A^2 - x^2\right) = \frac{1}{2}\,kx^2$$

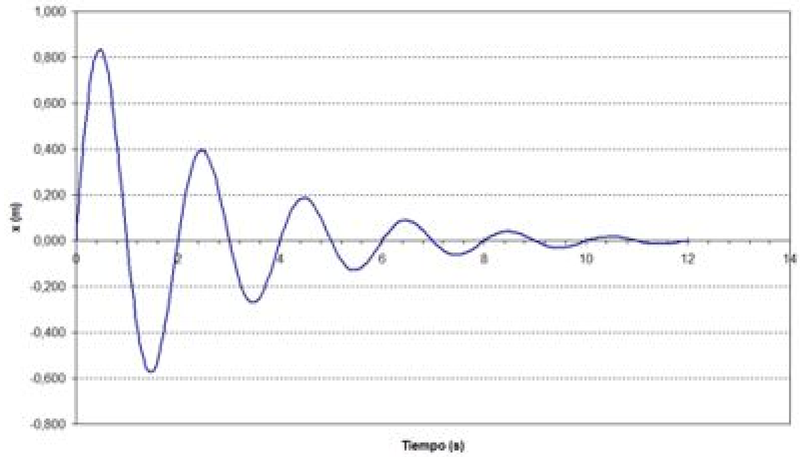
$$\left(A^2 - x^2\right) = x^2\ ;\ 2\,x^2 = A^2$$

$$\boxed{x = \frac{A}{\sqrt{2}}}\ ;\ x = \frac{0,60\ m}{\sqrt{2}} = 0,424\ m$$

Oscilaciones amortiguadas y forzadas. Resonancia

Los movimientos oscilatorios reales (por ejemplo la oscilación de un péndulo) van perdiendo amplitud hasta que, lentamente, se detienen debido a la acción de fuerzas no conservativas (rozamientos) que convierten la energía cinética en calor.

Se dice que las oscilaciones se ***amortiguan***, lo que se traduce en una disminución progresiva de la amplitud hasta la extinción total de las oscilaciones (ver gráfica a la derecha)



Por otro lado a un oscilador puede aplicársele una fuerza externa que lo fuerce a oscilar con determinada frecuencia (la de la fuerza aplicada). De esta manera, debido a la acción externa, se le comunica constantemente energía que, una vez absorbida por el oscilador, se traduce en movimiento.

La forma más efectiva de comunicar energía a un oscilador es cuando la frecuencia de la fuerza externa coincide (aunque sea de forma aproximada) con la frecuencia natural del oscilador, que para un muelle o un péndulo simple, viene dada por las expresiones:

Muelle

$$k = m\,\omega^2 = m\,(2\pi f)^2 = (4\pi^2 m)\,f^2$$

$$\boxed{f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}}$$

Pendulo simple

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}; \qquad \boxed{f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}}}$$

Si la energía se suministra con esta frecuencia la amplitud aumenta en cada aportación pudiendo hacerse (teóricamente) infinita, aunque en la realidad esto no llega a pasar debido a los efectos de la amortiguación descritos más arriba.

Cuando se suministra energía a un sistema oscilante con una frecuencia igual a su frecuencia de oscilación natural se dice que se produce resonancia, la energía del oscilador aumenta entonces en cada aportación pudiendo adquirir valores muy altos.