Dpto. Física y Química	**INTERACCIÓN GRAVITATORIA** **LEY DE GRAVITACIÓN UNIVERSAL**	**IES La Magdalena.** **Avilés. Asturias**

Fue **Isaac Newton (1642 – 1727)** quien dio el siguiente gran paso en la explicación del movimiento planetario al enunciar su **Ley de Gravitación Universal** (formulada en 1666 y publicada en 1687)

Ley de Gravitación Universal

"Los cuerpos se atraen con una fuerza directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que los separa."

Masas de los cuerpos en kg

Vector unitario.
Dirección: la de la recta que une los cuerpos.
Sentido: saliendo del cuerpo que se considera que atrae.

$$\vec{F} = -G\,\frac{m\,M}{d^2}\,\vec{u}_r$$

Fuerza de atracción gravitatoria. Si se consideran cuerpos grandes la fuerza apunta hacia el centro de los mismos.

Distancia entre los cuerpos en metros. Si son cuerpos grandes, la distancia se toma entre los centros.

El signo menos, tal y como se define el vector unitario, garantiza que ***la fuerza es siempre atractiva.***

Constante de Gravitación Universal. Tiene el mismo valor para todo el Universo.

Para el S.I:

$$G = 6,67\;10^{-11}\,\frac{N\,m^2}{kg^2} = 6,67\;10^{-11}\,\frac{m^3}{kg\,s^2}$$

Debido a la pequeñez de la constante de gravitación la fuerza de gravedad sólo es apreciable entre cuerpos cuya masa sea muy grande (planetas, estrellas…)

Vector unitario. Sale del cuerpo que se supone que atrae.

Fuerza con la que el cuerpo A atrae a B. Sentido contrario a u_r

Fuerza con la que el cuerpo B atrae a A. Sentido contrario a u_r

Vector unitario. Sale del cuerpo que se supone que atrae.

Ejemplo 1

Calcular el módulo de la fuerza con que una masa de 1 000 kg atrae a otra de 100 kg si ambas están situadas a una distancia de 20 m.
Comparar el resultado obtenido con la fuerza con que la Tierra atrae a un cuerpo de 50 kg situado en su superficie.
DATOS: M_{Tierra}: 6,0 10^{24} kg ; R_{Tierra}= 6,4 10^{6} m

Solución

La fuerza con la que se atraen dos masa de 1 000 y 100 kg valdrá:

$$F = G\,\frac{m\,M}{d^2} = 6{,}67\,10^{-11}\,\frac{N\,\cancel{m^2}}{\cancel{kg^2}}\;\frac{100\,\cancel{kg}\;1000\,\cancel{kg}}{20^2\,\cancel{m^2}} = 1{,}67\,10^{-8}\,N$$

Fuerza prácticamente inmedible debido a su pequeñez.

Sin embargo, la fuerza con que la Tierra atrae a un cuerpo de 50 kg situado en su superficie valdrá:

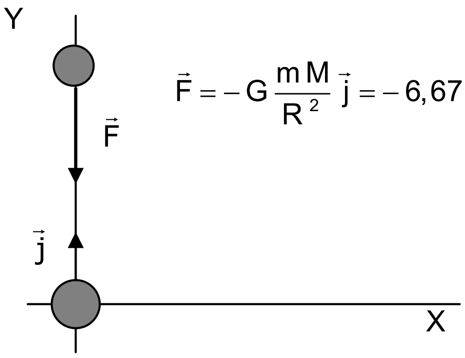
$$F = G\,\frac{m\,M}{R^2} = 6{,}67\,10^{-11}\,\frac{N\,\cancel{m^2}}{\cancel{kg^2}}\;\frac{50\,\cancel{kg}\;6\,10^{24}\,\cancel{kg}}{(6{,}4\,10^{6})^2\,\cancel{m^2}} = 488{,}5\,N$$

Que es una fuerza apreciable ya que la masa de la Tierra es muy grande.

Ejemplo 2

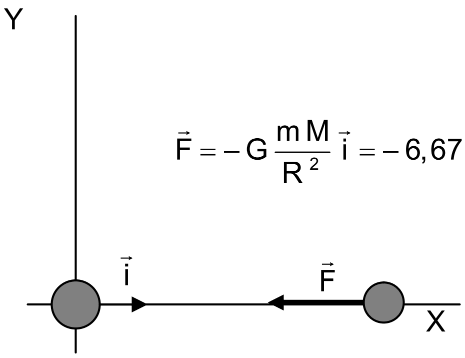
Una masa de 5,2 10^{13} kg se supone que está situada en el origen de coordenadas.
Calcular la fuerza de atracción ejercida sobre otra de 3,5 10^{6} kg situada a 10 km de distancia en el eje y.
Repetir el cálculo suponiendo que ahora la masa se sitúa sobre el eje x

Solución



$$\vec{F} = -G\,\frac{m\,M}{R^2}\,\vec{j} = -6{,}67\,10^{-11}\,\frac{N\,\cancel{m^2}}{\cancel{kg^2}}\;\frac{5{,}2\;10^{13}\,\cancel{kg}\;3{,}5\,10^{6}\,\cancel{kg}}{(10^4)^2\,\cancel{m^2}}\,\vec{j} = -121{,}4\,\vec{j}\,(N)$$

La fuerza tiene un módulo de 121,4 N y apunta en sentido contario al vector unitario j. Esto es hacia abajo (atracción)



$$\vec{F} = -G\,\frac{m\,M}{R^2}\,\vec{i} = -6{,}67\,10^{-11}\,\frac{N\,\cancel{m^2}}{\cancel{kg^2}}\;\frac{5{,}2\;10^{13}\,\cancel{kg}\;3{,}5\,10^{6}\,\cancel{kg}}{(10^4)^2\,\cancel{m^2}}\,\vec{i} = -121{,}4\,\vec{i}\,(N)$$

La fuerza tiene el mismo módulo, pero ahora apunta en sentido contario al vector unitario i. Esto es hacia la izquierda (atracción)

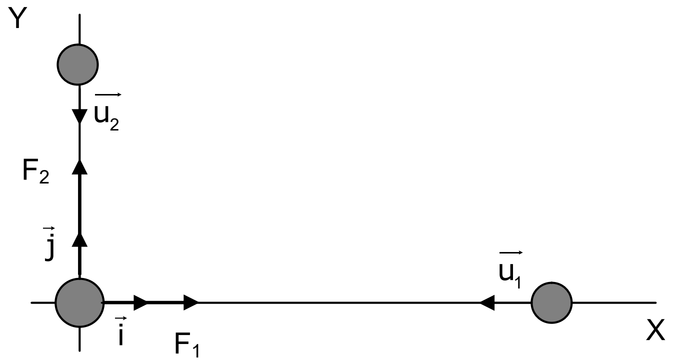
La fuerza que una masa ejerce sobre otra no se ve afectada por la presencia de una tercera masa. Cada una de ellas atrae a la masa considerada superponiéndose ambas fuerzas. ***La fuerza resultante sobre la masa es la suma vectorial de las fuerzas ejercidas*** **(Principio de Superposición).**

Ejemplo 3

Una masa de 3,2 10^{13} kg está en el origen de coordenadas, otra de 5,4 10^{6} kg se sitúa a 5 km de distancia en el eje y una tercera de 4,6 10^{7} kg sobre el eje X a una distancia de 10 km.

Calcular la fuerza resultante actuante sobre la masa situada en el origen de coordenadas.

Solución



La fuerza ejercida por la masa situada sobre el eje X, vale:

$$\vec{F}_1 = -G\,\frac{m_1\,M}{d_1^2}\left(\overrightarrow{u_1}\right) = -6{,}67\,10^{-11}\,\frac{N\,\cancel{m^2}}{\cancel{kg^2}}\;\frac{3{,}2\;\;10^{13}\,\cancel{kg}\;4{,}6\,10^{7}\;\;\cancel{kg}}{(10^4)^2\;\;\cancel{m^2}}\left(-\vec{i}\right) = 981{,}8\;\vec{i}\;(N)$$

La fuerza ejercida por la masa situada sobre el eje Y, vale:

$$\vec{F}_2 = -G\,\frac{m_2\,M}{d_2^2}\left(\overrightarrow{u_2}\right) = -6{,}67\,10^{-11}\,\frac{N\,\cancel{m^2}}{\cancel{kg^2}}\;\frac{3{,}2\;\;10^{13}\,\cancel{kg}\;5{,}4\,10^{6}\;\;\cancel{kg}}{(5\,10^3)^2\;\;\cancel{m^2}}\left(-\vec{j}\right) = 461{,}0\,\vec{j}\;(N)$$

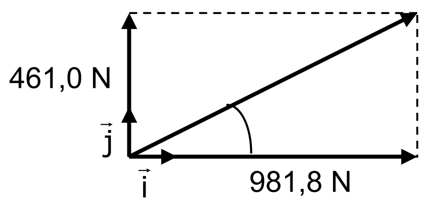
La fuerza resultante será:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 981{,}8\;\vec{i} + 461{,}0\;\vec{j}$$

Módulo:

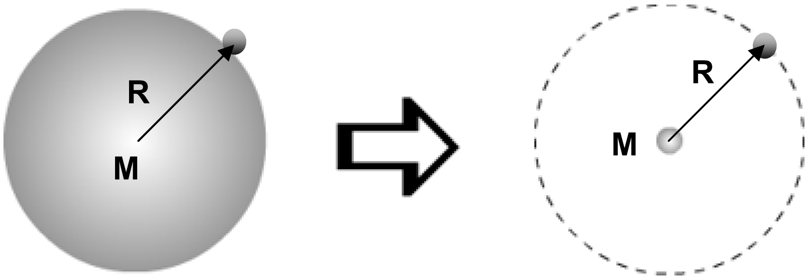
$$\vec{F} = 981{,}8\;\vec{i} + 461{,}0\;\vec{j}$$
$$F = \sqrt{981{,}8^2 + 461{,}0^2}\;N = 1\,084{,}6\;N$$

Ángulo formado con el eje X



$$tg\;\alpha = \frac{461{,}0}{981{,}8} = 0{,}4695\;;\;\alpha = 25{,}2^0$$

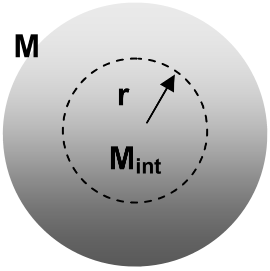
Cuando se consideran masa extensas, éstas se comportan como si la totalidad de la masa se concentrara en su centro. Esto es, podemos considerar toda la masa concentrada en un punto (de radio nulo) situado en su centro (masa puntual). Por esta razón las distancias hay que tomarlas siempre desde el centro de las masas:



La fuerza ejercida por una masa extensa sobre un objeto situado en su superficie es la misma que si consideramos una masa puntual situada en su centro en la que se concentra la totalidad de la masa.

$$F = G\,\frac{m\,M}{R^2}$$

Por esta razón si nos situamos en el interior de la esfera a una distancia r del centro (siendo r<R), la única masa que ejerce atracción es la situada en la esfera de radio r. Por tanto, la fuerza con que un objeto es atraído disminuye a medida que descendemos hacia el interior, anulándose en el centro (r =0).

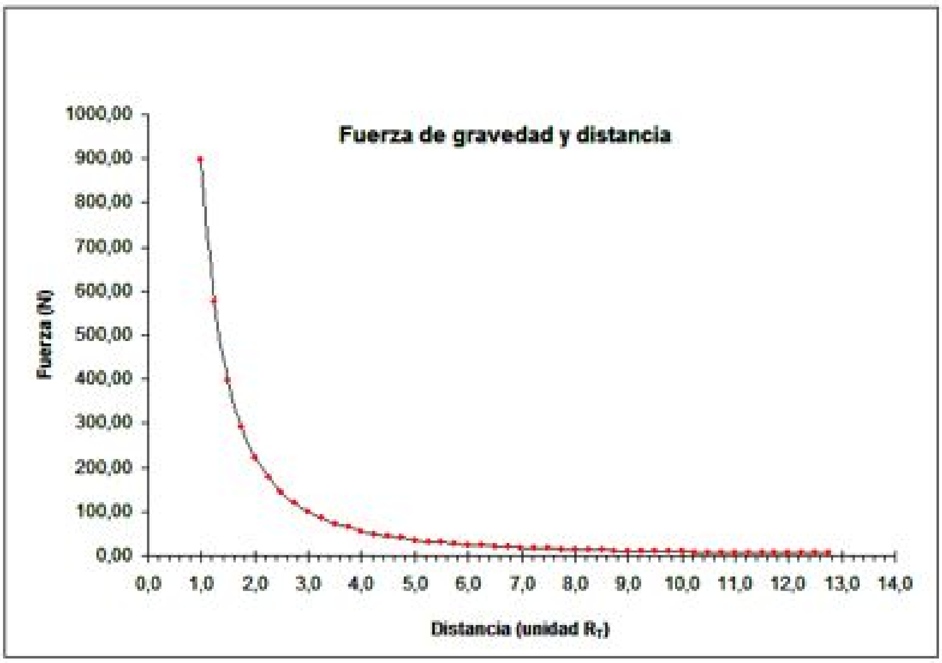


Si por el contrario vamos desde el centro hacia el exterior la gravedad aumenta hasta adquirir su valor máximo en la superficie y, a partir de ahí, comienza a disminuir.

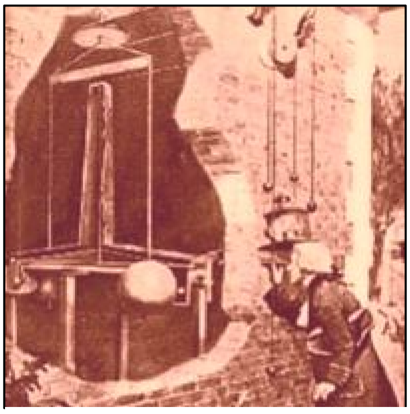
Debido a que la fuerza de gravedad es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia, su valor decae muy rápidamente al alejarse de la masa responsable de la atracción.

La gráfica de más abajo muestra el valor de la fuerza de gravedad creada por el planeta Tierra sobre una masa de 100 kg situada inicialmente en su superficie ($d = R_T$) y cómo varía cuando el objeto se va alejando.

Como se puede ver si nos alejamos a una distancia de unos 10 radios terrestres la fuerza de gravedad se hace prácticamente nula. Realmente no se anula nunca, ya que tiende asintóticamente a cero al aumentar la distancia.



La constante de gravitación universal, G, no fue determinada por Newton y su valor permaneció desconocido durante mucho tiempo.



Grabado en el que se muestra a Cavendish realizando un experimento con la balanza de torsión

Henry Cavendish (1731-1810) realizó un experimento (cuyos resultados hizo públicos en 1798) con el fin de determinar la densidad de la Tierra utilizando para ello una balanza de torsión (ideada por su amigo el reverendo John Michell y que se puede observar en el grabado de la izquierda). Entonces no se concedía a G el carácter de constante universal que se le da hoy día, ni la importancia que hoy le concedemos ya que a efectos prácticos su valor se consideraba incluido en el de la masa de la Tierra.

El valor obtenido por Cavendish para la densidad de la Tierra fue de 5,45 g/cm^3 y sirvió a mediados del s. XIX para determinar el valor de G.

Una de las primeras referencias conocidas de la constante de gravitación es de 1873.

Ejemplo 4

Ampliación

Obtener el valor de la constante de gravitación, G, a partir de los datos siguientes:

$g = 9{,}81\ m/s^2$; $R_{Tierra} = 6{,}37\ 10^3\ km$; $d_{Tierra} = 5{,}45\ g/cm^3$

Solución:

Teniendo en cuenta que llamamos peso a la fuerza con que la Tierra atrae a los cuerpos, y suponiendo que el objeto esté situado en la superficie de la Tierra (a una distancia R_T de su centro), podremos igualar las expresiones siguientes:

$$P = m\,g\ ;\ \ F = G\,\frac{M_T\,m}{R_T^2}$$

$$\cancel{m}\,g = G\,\frac{M_T\,\cancel{m}}{R_T^2}\ ;\ g = G\,\frac{M_T}{R_T^2}\ ;\ G = \frac{gR_T^2}{M_T}\quad (1)$$

$$\text{Como}: d_T = \frac{M_T}{V_T}\quad y\quad V_T = \frac{4}{3}\pi\,R_T^3$$

$$M_T = d_T V_T = d_T\,\frac{4}{3}\pi\,R_T^3\quad \text{Sustituyendo en (1)}$$

$$G = \frac{gR_T^2}{M_T} = \frac{gR_T^2}{d_T\,\frac{4}{3}\pi\,R_T^3} = \frac{3g}{4\pi R_T d_T}$$

$$G = \frac{3g}{4\pi R_T d_T} = \frac{3.\ 9{,}81\,\frac{m}{s^2}}{4\pi\ 6{,}37\ 10^6 m\ 5{,}45\ 10^3\,\frac{kg}{m^3}} = 6{,}75\ 10^{-11}\,\frac{m^3}{kg\ s^2}$$

La masa es una propiedad general de la materia. Según la segunda ley de Newton es una medida de la inercia del cuerpo o de la resistencia que éste opone a variar su velocidad, por eso la masa que aparece en las ecuaciones de la dinámica recibe el nombre de ***"masa inercial".***

De la expresión de la Ley de Gravitación Universal se desprende que debido a su masa los cuerpos se atraen. Por eso la masa que aparece en la expresión recibe el nombre de ***"masa gravitacional"***.

¿Son iguales la masa inercial y la gravitacional? Todos los experimentos realizados con el fin de determinar alguna diferencia han resultado negativos, por lo que se considera que ambas masas son idénticas. Precisamente la igualdad de ambas masas dio a A. Einstein la pista definitiva para elaborar la Teoría General de la Relatividad.

Ley de Gravitación y órbitas

La ley de Gravitación Universal permite conocer ***la causa*** por la cual los planetas orbitan alrededor del Sol con el movimiento descrito por las leyes de Kepler.

- El propio Newton demostró que cuando un cuerpo se mueve en torno a otro en una trayectoria cerrada, y sometido a una fuerza de atracción inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que los separa, ***describe una elipse en la que el cuerpo que atrae está situado en uno de los focos. (Primera Ley de Kepler)***
- Si la fuerza que mantiene a un objeto en órbita alrededor de otro es central, se puede demostrar (ver apuntes sobre momento angular) que el vector momento angular permanece invariable (esto es permanece constante en módulo, dirección y sentido), lo que implica que ***la trayectoria seguida será plana***, tal y como se observa en las órbitas de los planetas.
- La constancia del momento angular (debida a la existencia de una fuerza atractiva y central) lleva a la conclusión de que ***la velocidad areolar de los planetas es constante (Segunda Ley de Kepler)*** (ver apuntes sobre momento angular para un mayor detalle).

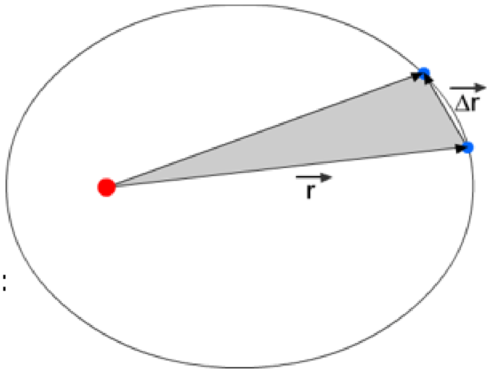
$$A=\frac{1}{2}\left|\vec{r}\wedge\overrightarrow{\Delta r}\right|=\frac{1}{2}\left|\vec{r}\wedge\vec{v}\,t\right|=\frac{1}{2\,m}\left|\vec{r}\wedge m\,\vec{v}\right|t=\frac{1}{2\,m}L\,t$$

Por tanto:

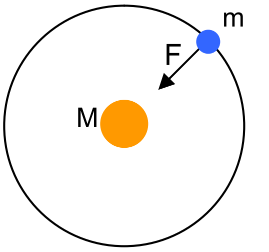
$$A=\frac{1}{2\,m}L\,t\,;\ \boxed{\frac{A}{t}=\frac{L}{2\,m}}$$

Como L es constante, ya que la fuerza es central:

$$v_A=\frac{A}{t}=cte$$



- Si la fuerza que el Sol ejerce sobre los planetas es la propuesta por Newton, y consideramos que la órbita es circular (lo cual simplifica los cálculos y, como se ha visto, no está lejos de la realidad), obtenemos:



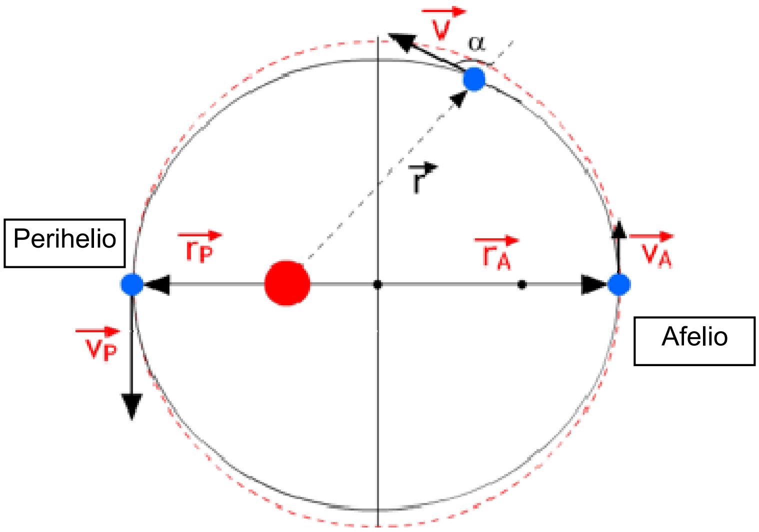
$$\left.\begin{aligned}F_c&=m\,a_N=m\,\omega^2 d\\ F&=G\frac{m\,M}{d^2}\end{aligned}\right\}\ \cancel{m}\,\omega^2\,d=G\frac{\cancel{m}\,M}{d^2};\quad \frac{(2\pi)^2}{T^2}d^3=G\,M;\quad T^2=\frac{4\,\pi^2\,d^3}{G\,M};\quad T^2=\left(\frac{4\,\pi^2}{G\,M}\right)d^3$$

Llegamos a la expresión matemática de la ***Tercera Ley de Kepler*** que surge (como las dos anteriores) de la existencia de una fuerza central inversamente proporcional al cuadrado de la distancia.

Además, se concluye que el valor de la constante depende de la masa del astro central. Para el Sistema Solar su valor será (introduciendo la masa del Sol):

$$k=\frac{4\,\pi^2}{G\,M}=\frac{4\,\pi^2}{6{,}67\,10^{-11}\,\frac{m^3}{\cancel{kg}\,s^2}\,1{,}98\,10^{30}\,\cancel{kg}}=2{,}99\,10^{-19}\,\frac{s^2}{m^3}$$

- Como en los puntos de máxima aproximación del planeta al Sol (***perihelio***) o de máximo alejamiento (***afelio***) el radio vector y la velocidad del planeta forman un ángulo de 90^0 podemos escribir:



$$L = r\,m\,v\,\mathrm{sen}\,\alpha$$

$$L = r\,m\,v$$
$$L_A = r_A m v_A$$
$$L_P = r_P m v_P$$

Como $L = cte$:

$$L_A = L_P\ ;\ r_A \cancel{m} v_A = r_P \cancel{m} v_P$$
$$\boxed{r_A v_A = r_P v_P}$$

Velocidad del planeta y distancia al Sol son inversamente proporcionales en esos puntos. La velocidad del planeta es máxima en el perihelio y mínima en el afelio

- Si suponemos una órbita circular (lo cual no está muy alejado de la realidad) podemos combinar la Ley de Gravitación Universal con la dinámica del movimiento circular para obtener, por ejemplo, la ***aceleración centrípeta*** de la Tierra debida a su movimiento de traslación alrededor del Sol o su ***velocidad orbital.***

  Datos: Masa del Sol: $1{,}98\ 10^{30}$ kg
  Distancia (media) Tierra – Sol : $1{,}5\ 10^{8}$ km

$$\left.\begin{aligned} F_c &= m\,a_N \\ F &= G\frac{m\,M}{d^2}\end{aligned}\right\}\quad \cancel{m}\,a_N = G\frac{\cancel{m}\,M}{d^2}\ ;\quad \boxed{a_N = G\frac{M}{d^2}}$$

$$a_N = G\frac{M}{d^2} = 6{,}67\ 10^{-11}\ \frac{m^3}{\cancel{kg}\ s^2}\ \frac{1{,}98\ 10^{30}\ \cancel{kg}}{\left(1{,}5\ 10^{11}\right)^2\ m^2} = 5{,}87\ 10^{-3}\ \frac{m}{s^2}$$

$$\left.\begin{aligned} a_N &= G\frac{M}{d^2} \\ a_N &= \frac{v^2}{d}\end{aligned}\right\}\quad \frac{v^2}{d} = G\frac{M}{d^2}\ ;\quad \boxed{v = \sqrt{\frac{G\,M}{d}}}$$

$$v = \sqrt{\frac{G\,M}{d}} = \sqrt{\frac{6{,}67\ 10^{-11}\ \frac{m^{\cancel{3}\,2}}{\cancel{kg}\ s^2}\ \ 1{,}98\ 10^{30}\ \cancel{kg}}{1{,}5\ 10^{11}\ \cancel{m}}} = 29\,672\ \frac{m}{s} = 29{,}7\ \frac{km}{s} = 106\,920\ \frac{km}{h}$$

Ejemplo 5

Io es una de las sesenta y tres lunas de Júpiter (la más próxima al planeta) y tiene un periodo orbital de 1 día 18 h y 28 min. ¿Cuál es la distancia media entre Ío y Júpiter?

DATOS: Masa de Júpiter: $1,90.10^{27}$ kg

Solución:

Expresamos el periodo orbital en segundos: 1 día 18 h y 28 min = 152 880 s

Partimos de la tercera ley de Kepler: $T^2 = k\, r^3$ y despejamos la incógnita (r): $r = \sqrt[3]{\dfrac{T^2}{k}}$

Hay que tener en cuenta que el astro central alrededor del cual orbita Ío es Júpiter, no el Sol. Por ***tanto deberemos determinar el valor de k para este caso sustituyendo la masa de Júpiter*** en la expresión que nos da la constante de Kepler (ver más arriba)

$$k = \frac{4\pi^2}{G\,M} = \frac{4\pi^2}{6{,}67\,10^{-11}\,\dfrac{m^3}{\cancel{kg}\,s^2}\,1{,}90\,10^{27}\,\cancel{kg}} = 3{,}12\,10^{-16}\,\frac{s^2}{m^3}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{T^2}{k}} = \sqrt[3]{\frac{\left(1{,}53.10^5\right)^2\,\cancel{s^2}}{3{,}12.10^{-16}\,\dfrac{\cancel{s^2}}{m^3}}} = 4{,}22.10^8\,m = 4{,}22.10^5\,km = 422\,000\ km$$

NOTA: El radio orbital medio de Io alrededor de Júpiter se estima en 421 600 km

- ***La masa del astro central se puede estimar a partir de la observación de algún objeto que orbite alrededor suyo.*** De esta manera es relativamente sencillo estimar la masa de los planetas que tienen satélites. En el caso de los planetas que no poseen lunas (Mercurio o Venus) la determinación de su masa es más complicada.

Ejemplo 6

Titán es una luna de Saturno que orbita alrededor del planeta con un periodo de $1,37.10^6$ s y a una distancia media de $1,30.10^9$ m. ¿Cuál es la masa de Saturno?

Solución:

Partimos de la tercera ley de Kepler: $T^2 = k\, r^3$ y sustituimos el valor de k : $T^2 = \left(\dfrac{4\pi^2}{G\,M}\right) r^3$

Despejando la masa del astro central (Saturno) y sustituyendo datos:

$$M = \frac{4\pi^2}{G}\,\frac{r^3}{T^2} = \frac{4\pi^2}{6{,}67\,10^{-11}\,\dfrac{\cancel{m^3}}{kg\,\cancel{s^2}}}\;\frac{\left(1{,}30\,10^9\right)^3\,\cancel{m^3}}{\left(1{,}37\,10^6\right)^2\,\cancel{s^2}} = 6{,}93\,10^{26}\,kg$$

Ejemplo 7

En la tabla que se muestra a la derecha se dan los valores de algunos parámetros de la órbita de la Tierra. Completar las celdas vacías.

Ampliación

Parámetros	Valores
Distancia perihelio	147 055 091 km
Distancia afelio	152 141 431 km
Velocidad afelio	$2,92\ 10^4$ m/s
Velocidad perihelio	
Excentricidad	0,017
Semieje mayor	149 598 261
Semieje menor	
Distancia focal	

Solución:

La velocidad en el perihelio se puede calcular haciendo uso de la constancia del momento angular:

$$r_A v_A = r_P V_P$$

$$V_P = \frac{r_A}{r_P}\,v_A = \frac{152\,141\,431\,\cancel{km}}{147\,055\,091\,\cancel{km}}\,2{,}92\,10^4\,\frac{m}{s} = 3{,}02\,10^4\,\frac{m}{s}$$

La velocidad en el perihelio es un 3,4 % mayor.

Para calcular el valor del semieje menor y la distancia focal hacemos uso de la expresión de la excentricidad de una elipse:

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$

$$c = \varepsilon\, a = 0{,}017 \,.\, 149\ 598\ 261\ \ \text{km} = 2\ 543\ 170\ \text{km}$$

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}\ ;\ \varepsilon^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}\ ;\ \frac{b^2}{a^2} = 1 - \varepsilon^2$$

$$b = a\sqrt{(1-\varepsilon^2)} = 149\ 598\ 261\ \ \text{km}\ \sqrt{(1 - 0{,}017^2)} = 149\ 576\ 643\ \text{km}$$

La diferencia entre el semieje mayor y el menor de la órbita terrestre es, por tanto, de 21 618 km. El semieje menor es un 0,01445% más corto que el mayor, lo que vuelve a confirmar lo próxima que está la órbita terrestre a un círculo.

- ***Órbita geoestacionaria***

Si se desea que un satélite orbite alrededor de un planeta de forma tal que esté siempre colocado sobre el mismo punto (lo que se emplea en el caso de satélites de comunicaciones, metereológicos u otros) es necesario que una vez colocado en posición gire con idéntico periodo que el de rotación de la Tierra (24 h). Para que esto suceda deberá situarse a una distancia de la Tierra (medida desde su centro) dada por:

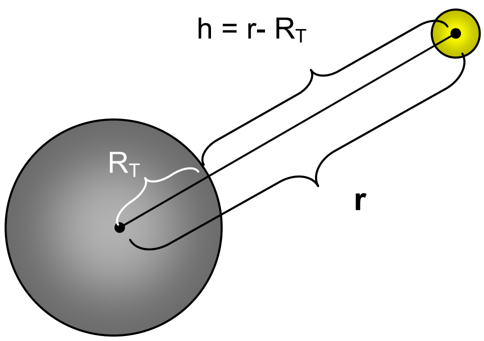
$$T^2 = \left(\frac{4\,\pi^2}{G\,M_T}\right) r^3\ ;\ T^2 = k_T\, r^3$$

$$\text{Donde: } k_T = \frac{4\,\pi^2}{G\,M_T} = \frac{4\,\pi^2}{6{,}67 10^{-11}\, \frac{m^3}{\cancel{kg}\, s^2}\, 5{,}97 10^{24}\, \cancel{kg}} = 9{,}91 \,.\, 10^{-14}\, \frac{s^2}{m^3}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{T^2}{k_T}} = \sqrt[3]{\frac{(86\ 400)^2\ \cancel{s^2}}{9{,}91 \,.\, 10^{-14}\ \frac{\cancel{s^2}}{m^3}}} = 42\ 232\ 927\ \text{m} = 42\ 233\ \text{km}$$

Para saber la altura, medida desde la superficie de la Tierra, restamos el radio terrestre:

$$h = r - R_T = 42\ 233 - 6370\ \text{km} = 35\ 863\ \text{km}$$



NOTA. Las órbitas geoestacionarias se sitúan a unos 35 786 km sobre el ecuador, lo que coincide con el resultado obtenido en el cálculo.

- ***Cañon de Newton.*** El propio Newton llegó a la conclusión de que las órbitas podían ser consideradas como verdaderas "caídas libres" del objeto que orbita.

  En la figura se muestra un hipotético cañón que dispara una bala. Las trayectorias A y B representan parábolas que acaban en la superficie de la Tierra. Sin embargo, si aumentamos suficientemente la velocidad con que se dispara la bala, llegará un momento en que su trayectoria no intersectará la superficie terrestre. Como además el objeto está sometida a la fuerza de atracción central (que apunta hacia el centro del planeta) su trayectoria se curvará convirtiéndose en un satélite. Continúa "cayendo" sobre el planeta en una caída sin fin.

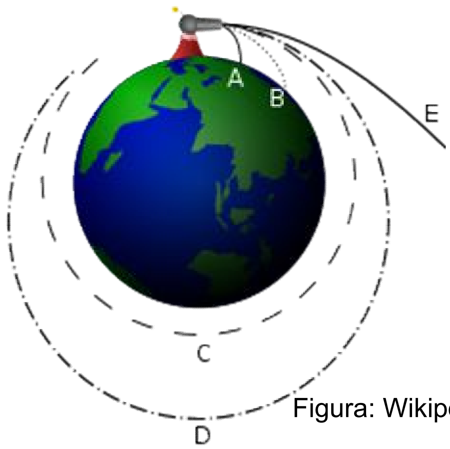
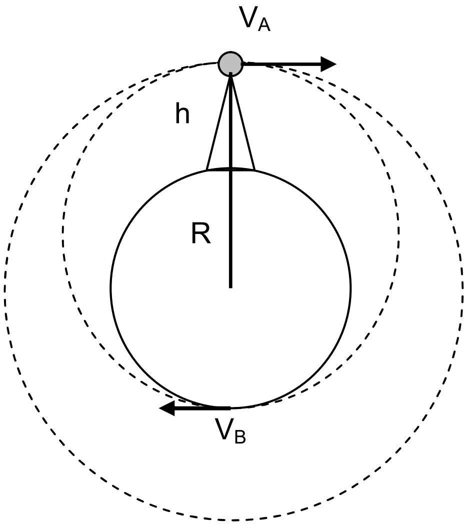


Figura: Wikipedia

  En función de la velocidad dada inicialmente la órbita puede ser una circunferencia, una elipse o, incluso, convertirse en una trayectoria abierta (trayectoria E) en la que el objeto se aleja indefinidamente del planeta venciendo la atracción gravitatoria de éste.



Como la fuerza que actúa sobre el objeto en órbita es central se conservará el momento angular. En consecuencia podemos poner para los puntos A y B:

$$\left.\begin{aligned} v_A\, r_A &= v_B\, r_B \\ r_A &= R + h \end{aligned}\right\} v_A\,(R+h) = v_B\, r_B$$

En el punto B :

$$F_N = m\, a_N = m\,\frac{v_B^2}{r_B}$$

$$\frac{G\,M}{r_B^2} = \frac{v_B^2}{r_B}\;;\quad \frac{G\;\;M}{r_B} = v_B^2$$

$$v_B = \sqrt{\frac{G\;\;M}{r_B}}$$

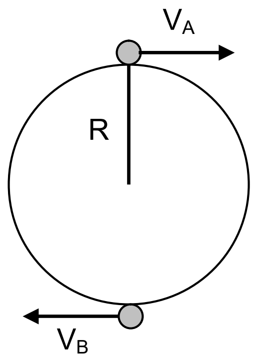
Ampliación

Por tanto :

$$V_A\,(R+h) = \sqrt{\frac{G\,M}{r_B}}\; r_B = \sqrt{G\,M\,r_B}$$

$$V_A\,(R+h) = \sqrt{G\,M\,r_B}$$

Imaginémonos ahora que el disparo se efectúa desde la superficie (h =0). ¿Cuál ha de ser la velocidad mínima necesaria para que el objeto quede en órbita alrededor de la Tierra? (consideramos nulo el rozamiento con el aire)



$$V_A\,(R+h) = \sqrt{G\,M\,r_B}$$

Ahora :

$$h = 0\;;\;\; r_B = R$$

$$V_A\,R = \sqrt{G\,M\,R}$$

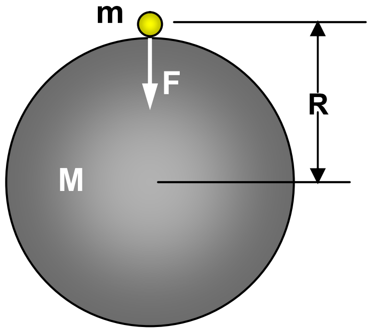
Ampliación

$$V_A = \sqrt{\frac{G\,M}{R}} = \sqrt{\frac{6,67\;10^{-11}\,\frac{m^{\cancel{3}\,2}}{\cancel{kg}\;s^2}\;5,98\;10^{24}\,\cancel{kg}}{6,37\;10^{6}\,\cancel{m}}} = 7913\,\frac{m}{s} = 7,91\,\frac{km}{s} = 28\;487\,\frac{km}{h}$$

NOTA: Para comunicar esa velocidad a un objeto de 10 kg sería necesario transferirle una cantidad de energía equivalente a la liberada en la explosión de 100 kg de TNT (recordar que se supone nulo el rozamiento con el aire)

Ley de Gravitación y aceleración de la gravedad

Llamamos peso a la fuerza con que la Tierra atrae a un cuerpo situado en su superficie.



$$P = F = G\,\frac{m\,M}{R^2}$$

La expresión anterior se puede escribir en la forma: $P = m\left(\frac{G\,M}{R^2}\right)$

La expresión encerrada entre paréntesis depende únicamente de datos propios del astro considerado, tales como su masa o su radio y se corresponde con la aceleración de la gravedad, g.

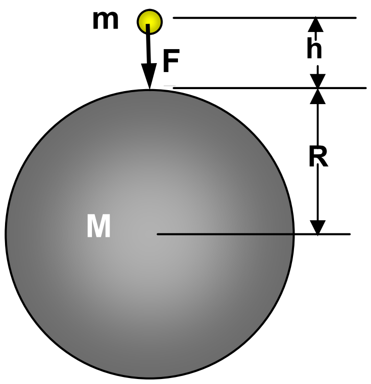
$$\boxed{g = G\,\frac{M}{R^2}}$$

Para la Tierra ($M = 5{,}97\ 10^{24}$ kg y $R = 6{,}37\ 10^{6}$ m): $g = 6{,}67\,10^{-11}\,\frac{m^{\cancel{3}}}{\cancel{kg}\,s^2}\,\frac{5{,}97\,10^{24}\,\cancel{kg}}{(6{,}37\,10^6)^2\,\cancel{m^2}} = 9{,}81\,\frac{m}{s^2}$

Por tanto, podemos escribir: **P = m g**

El valor de g no es constante en todo el planeta ya que prescindiendo de otros efectos (la rotación influye) el radio de la tierra en el Ecuador es mayor que en los Polos, por tanto $g_{\text{Ecuad}} < g_{\text{Polos}}$.

Si nos alejamos de la superficie terrestre el valor de la gravedad también variará ya que entonces deberíamos escribir:



$$P = F = G\,\frac{m\,M}{(R+h)^2} = m\left(G\,\frac{M}{(R+h)^2}\right)$$

$$g = G\,\frac{M}{(R+h)^2} = G\,\frac{M}{R^2\left(1+\frac{h}{R}\right)^2} = \frac{g_0}{\left(1+\frac{h}{R}\right)^2}$$

Donde: $g_0 = G\,\frac{M}{R^2}$ (valor de g en la superficie)

Así para h = 360 km, tenemos:

$$g = G\,\frac{M}{(R+h)^2} = 6{,}67\,10^{-11}\,\frac{m^{\cancel{3}}}{\cancel{kg}\,s^2}\,\frac{6{,}0\,10^{24}\,\cancel{kg}}{(6{,}4\,10^6 + 3{,}6\,10^5)^2\,\cancel{m^2}} = 8{,}76\,\frac{m}{s^2}$$

El valor de la gravedad a 360 km sobre la superficie terrestre es menor que sobre esta, pero sólo un 10,7% más pequeña. A esta distancia es a la que está situada la Estación Espacial Internacional (ISS), por tanto, y según nuestros cálculos, los astronautas que viven en ella deberían estar sometidos a una gravedad algo menor que la correspondiente a nuestro planeta, pero no deberían estar en estado de ingravidez, tal y como estamos acostumbrados a ver ¿qué ocurre?

Ejemplo 8

Calcular el valor de la gravedad en Mercurio sabiendo que tiene una radio de 2440 km y una masa de 3,30 10^{23} kg

Solución:

El valor de la gravedad en un planeta depende de su masa y radio y se puede calcular a partir de la expresión (ver más arriba):

$$g = G\,\frac{M}{R^2}$$

Sustituyendo los datos y operando:

$$g = G\,\frac{M}{R^2} = 6{,}67\,10^{-11}\,\frac{m^{\cancel{3}}}{\cancel{kg}\,s^2}\,\frac{3{,}30\,10^{23}\,\cancel{kg}}{\left(2{,}44\,10^{6}\right)^2\,\cancel{m^2}} = 3{,}70\,\frac{m}{s^2}$$

Ejemplo 9

El valor de la gravedad varía si nos alejamos de la superficie terrestre. Calcular a qué altura deberemos situarnos de la superficie de la Tierra para que g = 5 m/s^2

Masa de la Tierra: 6,0.10^{24} kg. Radio de la Tierra: 6 400 km.

Solución:

El valor de la gravedad para un punto situado a una altura h sobre la superficie terrestre viene dado por:

$$g = G\,\frac{M}{(R+h)^2}$$

$$(R+h)^2 = G\,\frac{M}{g} = 6{,}67\,10^{-11}\,\frac{m^{\cancel{3}\,2}}{\cancel{kg}\,\cancel{s^2}}\,\frac{6{,}0\,10^{24}\,\cancel{kg}}{5\,\frac{\cancel{m}}{\cancel{s^2}}} = 8{,}0\,10^{13}\,m^2$$

$$(R+h)^2 = 8{,}0\,10^{13}\,m^2\,;\,R+h = \sqrt{8{,}0\,10^{13}\,m^2} = 8{,}94\,10^{6}\,m = 8{,}94\,10^{3}\,km = 8940\,km$$

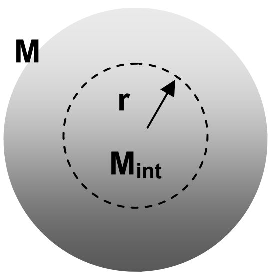
$$R+h = 8940\,km\ ;\ h = 8940 - R;\ h = 8940\,km - 6400\,km = 2540\,km$$

Ejemplo 10 Ampliación

Calcular el valor de la aceleración de la gravedad en un punto de la Tierra, interior a ella y situado a 2 500 km de su centro, suponiendo que tiene una densidad constante.

$g_{superficie}$= 9,81 m/s^2 ; R_{Tierra}= 6370 km

Solución:



$$g = G\,\frac{M_{int}}{r^2}$$

Para calcular la gravedad ***hay que considerar sólo la masa de la esfera interior al punto considerado***. Para determinarla hacemos uso del concepto de densidad.

$$d=\frac{m}{V};\quad m=V\,d$$

$$V_{TOTAL}=\frac{4}{3}\pi R^3;\ M_{TOTAL}=\frac{4}{3}\pi R^3\ d$$

$$V_{Int}=\frac{4}{3}\pi r^3;\ M_{Int}=\frac{4}{3}\pi r^3\ d$$

Dividiendo :

$$\frac{M_{Int}}{M_{TOTAL}}=\frac{\frac{4}{3}\pi r^3\ d}{\frac{4}{3}\pi R^3\ d}=\frac{r^3}{R^3};\quad M_{Int}=M_{TOTAL}\frac{r^3}{R^3}$$

Luego:

$$g=G\frac{M_{Int}}{r^2}=G\frac{M_{TOTAL}\frac{r^3}{R^3}}{r^2}=G\frac{M_{TOTAL}}{R^3}r$$

$$g=G\frac{M_{TOTAL}}{R^2}\frac{r}{R}=g_0\frac{r}{R}=9{,}81\frac{m}{s^2}\frac{2500\ \cancel{km}}{6370\ \cancel{km}}=3{,}85\frac{m}{s^2}$$

Ejemplo 11 Ampliación

Calcular el periodo de traslación de la Luna alrededor de la Tierra tal y como lo dedujo Newton. Esto es, a partir de los datos siguientes:

g_{Tierra}= 9,81 m/s^2 ; R_{Tierra}= 6 370 km ; Distancia Tierra - Luna r = 60 R_T

Solución:

Partamos de la expresión de la 3ª ley de Kepler: $T^2=\left(\frac{4\pi^2}{G\,M_T}\right)r^3$

Como: $g_T=G\frac{M_T}{R_T^2}$ podemos multiplicar y dividir el denominador de la constante de Kepler por el cuadrado del radio terrestre.

$$T^2=\frac{4\pi^2}{R_T^2\left(\frac{G\,M_T}{R_T^2}\right)}r^3=\frac{4\pi^2}{R_T^2\ g_T}r^3$$

$$T^2=\frac{4\pi^2}{R_T^2\ g_T}(60\,R_T)^3=\frac{4\pi^2}{g_T}60^3\ R_T$$

$$T=\sqrt{\frac{4\pi^2\ 60^3}{g_T}R_T}=\sqrt{\frac{4\pi^2\ 60^3}{9{,}81\frac{\cancel{m}}{s^2}}6{,}37\ 10^6\ \cancel{m}}=2\ 353\,108\ s$$

$$2\ 353\,108\ \cancel{s}\ \frac{1\ \cancel{h}}{3600\ \cancel{s}}\ \frac{1\,\text{día}}{24\ \cancel{h}}=27{,}2\ \text{días}$$

NOTA: El periodo de revolución de la Luna encontrado en la bibliografía es de 27,3122 días.