	INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO VECTORIAL	**IES La Magdalena. Avilés. Asturias**

Magnitudes escalares y vectoriales

La gran variedad de cosas medibles (magnitudes) se pueden clasificar en dos grandes grupos:

- Magnitudes que sólo requieren dar su valor. Por ejemplo 5,0 g ; 25 ^{0} C ; 54,65 s… Son las llamadas **magnitudes escalares.**
- Magnitudes que para estar correctamente especificadas se requiere conocer:

  Su valor o módulo.
  Su dirección (representada por una recta)
  Su sentido (que se representa por una punta de flecha)

  Son las llamadas **magnitudes vectoriales** que usan para su representación flechas o vectores. Son ejemplos de éstas la velocidad, la aceleración o las fuerzas.

Igualdad de dos vectores:

Dos vectores son iguales si tienen el mismo módulo, la misma dirección y el mismo sentido.

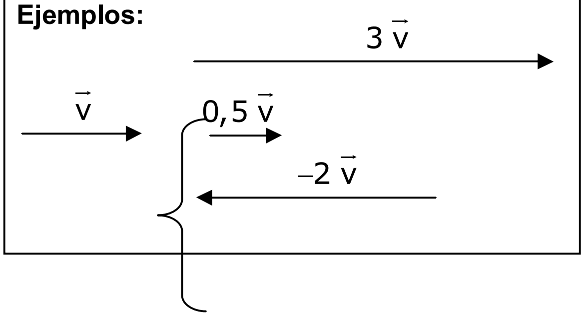
Producto de un escalar (número) por un vector

Es un vector:

- De módulo el producto del número por el módulo del vector.
- Dirección, la del vector.
- Sentido, el mismo del vector si el número es positivo y contrario si es negativo.

Al multiplicar un número por un vector obtenemos otro vector de la misma dirección y sentido que el primero (si el número es positivo), pero mayor o más pequeño. O bien, un vector (mayor o más pequeño) que apunta en sentido contrario al dado (si el número es negativo)

Ejemplos:

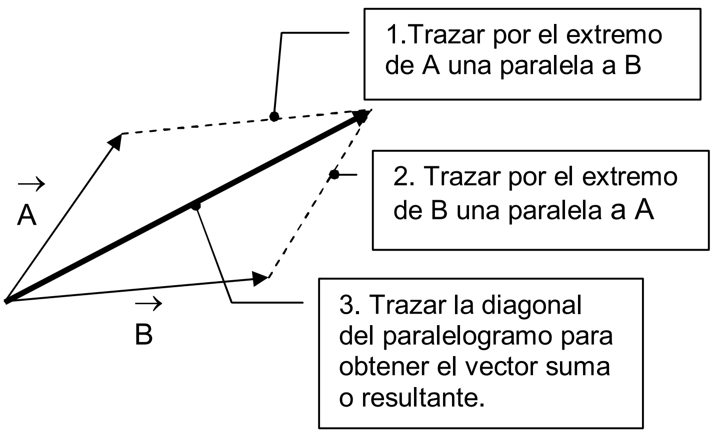


Suma de vectores

Al sumar dos vectores se obtiene otro vector (vector suma o resultante).

Para obtener el vector suma es necesario recurrir a lo que se conoce como "regla del paralelogramo". Esto es, se construye un paralelogramo que tenga los vectores como lados y se traza la diagonal del mismo para obtener el vector suma.

El vector suma $\vec{S}$ produce el mismo efecto actuando solo que los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ actuando a la vez.

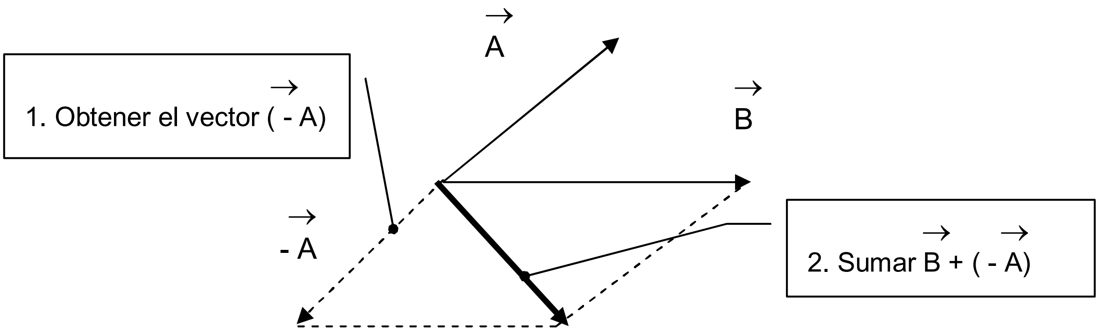


Resta de vectores

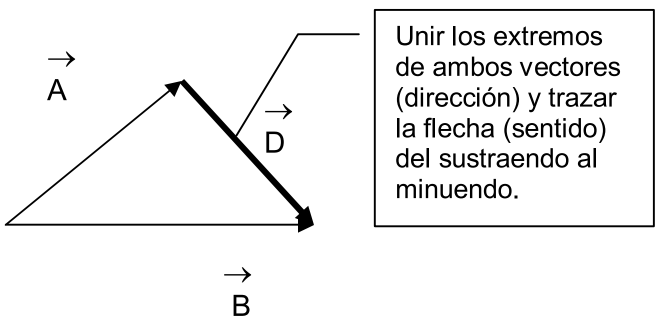
Al restar dos vectores se obtiene otro vector.

Para obtener el vector resta o diferencia se puede usar la regla del paralelogramo, teniendo en cuenta que la diferencia puede ser considerada como la suma de un vector y su opuesto:

$$\vec{B} - \vec{A} = \vec{B} + \left(-\vec{A}\right)$$



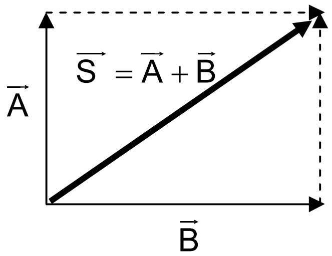
… aunque existe un procedimiento abreviado:



Si los vectores son perpendiculares:

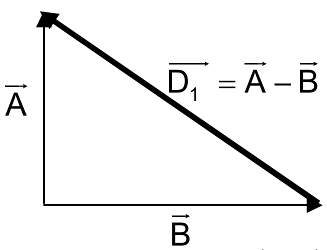
Para SUMAR

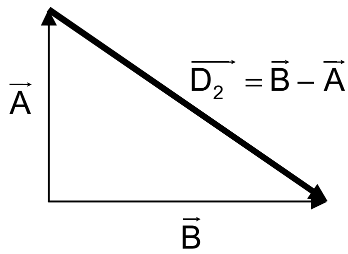
Construir el paralelogramo y trazar la diagonal



Para RESTAR

Unir los extremos de ambos vectores y asignar como sentido del vector diferencia el que va del sustraendo al minuendo.





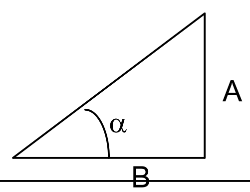
Observa que $\vec{A} - \vec{B} \neq \vec{B} - \vec{A}$ ya que son vectores que tienen el mismo módulo, la misma dirección, pero sentidos contrarios.

Tanto para la suma como para la resta. Si queremos obtener el valor del vector resultante, tendremos que hacer:

$$S^2 = A^2 + B^2\,;\, S = \sqrt{A^2 + B^2}$$

$$D^2 = A^2 + B^2\,;\, D = \sqrt{A^2 + B^2}$$

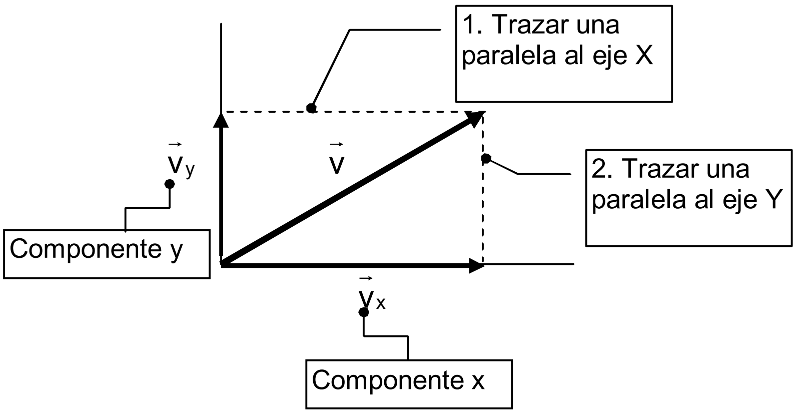
Si queremos saber el ángulo que forma con el eje x podemos utilizar la función tangente:



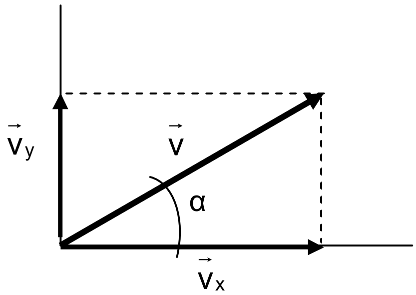
$$\text{tg}\,\alpha = \frac{A}{B}\,;\,\alpha = \text{invtg}\left(\frac{A}{B}\right)$$

Componentes de un vector

Siempre podemos descomponer un vector en sus dos componentes. Es decir, **obtener otros dos vectores perpendiculares que, actuando a la vez, produzcan el mismo efecto que el vector considerado actuando solo.**



Para obtener el valor (módulo) de las componentes:

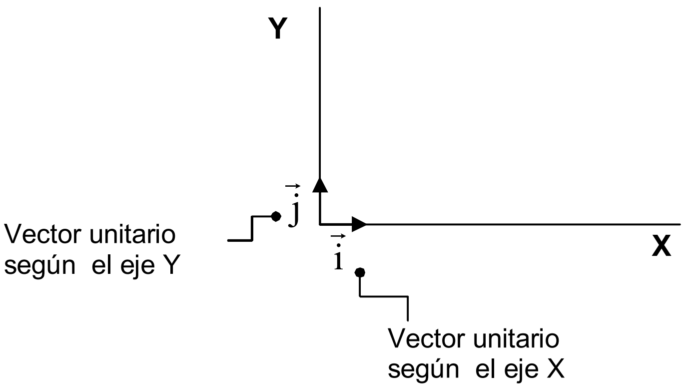


$v_x = v.\cos\alpha$
$v_y = v\,.\,\text{sen}\,\alpha$

Expresión de un vector en función de los vectores unitarios

Aprovechando el concepto de producto de un escalar por un vector se pueden obtener una notación muy útil para representar los vectores.

Se definen en primer lugar los llamados **vectores unitarios**. Esto es, unos vectores que tienen módulo uno (1), cuya dirección es la de los ejes coordenados y su sentido el sentido positivo de éstos.



Usando estos vectores es muy fácil escribir vectores cuya dirección sea la de los ejes coordenados:

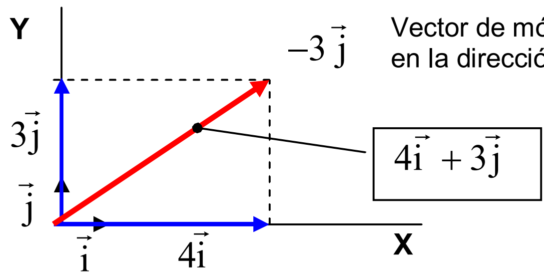
$3\,\vec{i}$ Vector de módulo 3 que apunta en la dirección positiva del eje X.

$-2\,\vec{i}$ Vector de módulo 2 que apunta en la dirección negativa del eje X.

$4\,\vec{j}$ Vector de módulo 4 que apunta en la dirección positiva del eje Y.

$-3\,\vec{j}$ Vector de módulo 3 que apunta en la dirección negativa del eje Y.

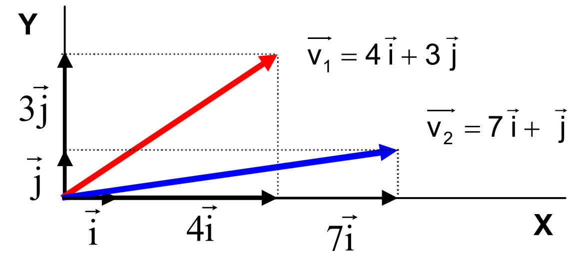
… y también resulta muy sencillo expresar cualquier otro vector:



La notación en función de los vectores unitarios da una gran información y facilita muchísimo el cálculo con vectores.

El vector $\overrightarrow{v} = 4\,\vec{i} + 3\,\vec{j}$, es un vector cuyo módulo vale: $v = \sqrt{4^2 + 3^2} = 25$ y que forma un ángulo con el eje x de: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4} = 0{,}75\,;\ \alpha = \operatorname{inv\,tg}(0{,}75) = 36{,}87\,^0$

Imaginemos dos vectores concurrentes en el origen expresados en función de los vectores unitarios…



Su suma, se obtendrá trazando el paralelogramo correspondiente. Al hacerlo observamos que el vector resultante tiene por componente x el vector:

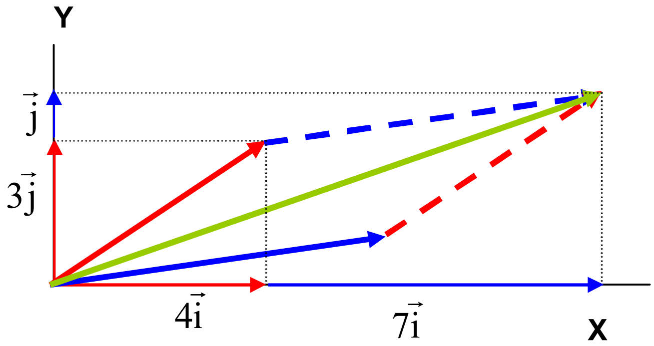
$$\vec{v}_x = 4\,\vec{i} + 7\,\vec{i} = 11\vec{i}$$

y por componente y el vector:

$$\vec{v}_y = 3\,\vec{j} + \vec{j} = 4\,\vec{j}$$

Por tanto el vector suma tendrá por componentes:

$$\vec{S} = 11\vec{i} + 4\,\vec{j}$$



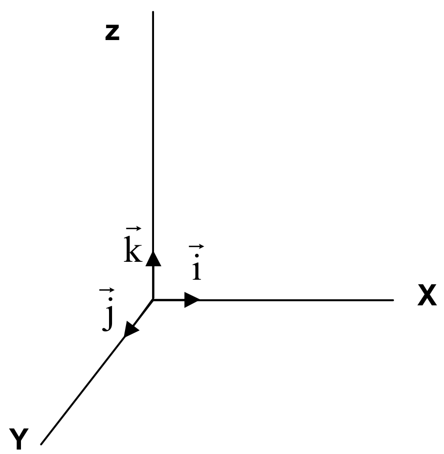
Para sumar vectores, se suman sus componentes:

$$\vec{S} = \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2} = \left(4\,\vec{i} + 3\,\vec{j}\right) + \left(7\,\vec{i} + \vec{j}\right) = 11\vec{i} + 4\,\vec{j}$$

De forma análoga podríamos concluir que para restar vectores, se restan sus componentes:

$$\vec{D} = \overrightarrow{v_1} - \overrightarrow{v_2} = \left(4\,\vec{i} + 3\,\vec{j}\right) - \left(7\,\vec{i} + \vec{j}\right) = -3\,\vec{i} + 2\,\vec{j}$$

Para trabajar en tres dimensiones solamente hay que definir un tercer vector unitario (k) orientado según el eje Z.



Cualquier vector puede entonces ser expresado como suma de sus tres componentes. La suma y resta se realizan de forma análoga a lo visto en dos dimensiones. Para calcular el módulo:

$$S = \sqrt{6^2 + 3^2 + 8^2} = 10{,}44$$