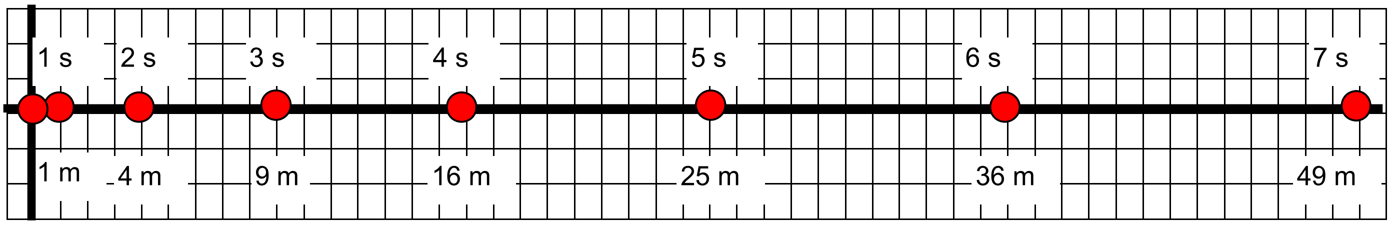
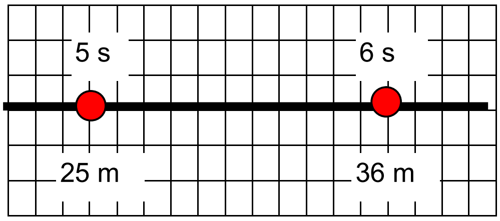
Dpto. Física y Química	**MOVIMIENTO UNIFORMEMENTE ACELERADO**	**IES La Magdalena. Avilés. Asturias**

Si consideramos un cuerpo que se mueve con velocidad variable ¿Cómo podemos calcular el valor de la velocidad en un instante determinado (por ejemplo para t =5 s)?



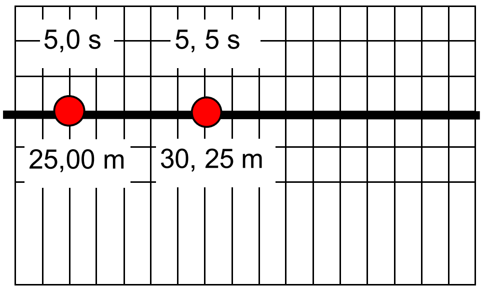
La pregunta no es fácil de contestar si pensamos cómo calculamos la velocidad (en realidad su módulo):

Observamos el móvil durante cierto tiempo y dividimos el espacio recorrido entre el tiempo que ha tardado en recorrerlo. Esto implica que hemos de tomar un intervalo de tiempo (por ejemplo: 1 s), pero como su velocidad varía, lo que realmente estamos calculando será la velocidad media entre el instante t = 5,0 y t = 6,0 s. Esto es, la velocidad constante a la que debe moverse el móvil para recorrer el espacio considerado en el mismo tiempo.



$$v_m = \frac{(36-25)\,m}{1\,s} = 11\,\frac{m}{s}$$

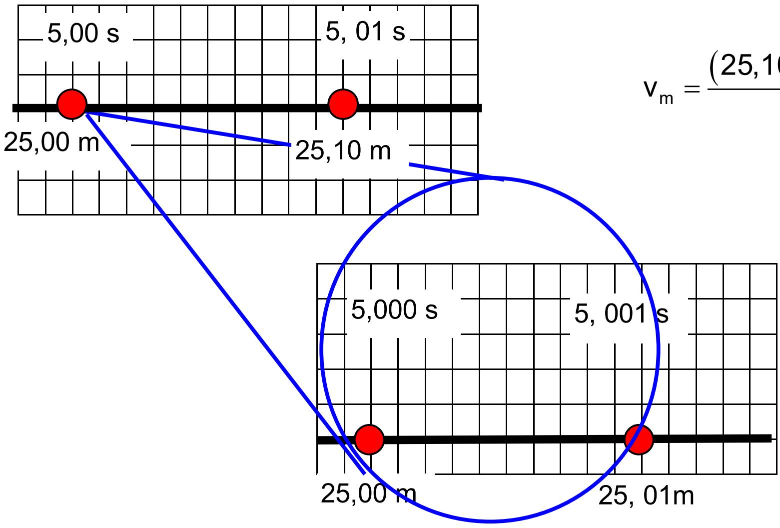
¿Qué ocurrirá si hacemos más pequeño el intervalo de tiempo? Seguiremos calculando una velocidad media, pero el resultado se aproximará más al valor buscado.



$$v_m = \frac{(30,25-25,00)\,m}{0,50\ s} = 10,50\,\frac{m}{s}$$

Podemos reiterar el procedimiento e ir estrechando cada vez más el intervalo de tiempo. De esta manera **vamos obteniendo el valor de la velocidad media entre dos puntos que están cada vez más próximos** y, en consecuencia, el valor obtenido se ira aproximando más y más al que la velocidad tendría en el instante t = 5 s.

¿Qué ocurriría si lográsemos calcular esta velocidad media entre dos puntos infinitamente próximos? Entonces obtendríamos la velocidad en el instante t = 5 s, con un error infinitamente pequeño (infinitesimal). Esto se puede lograr mediante un procedimiento matemático denominado “paso al límite”, que forma parte del llamado cálculo infinitesimal.



$$v_m = \frac{(25{,}10 - 25{,}00)\,m}{0{,}01\,s} = 10{,}01\,\frac{m}{s}$$

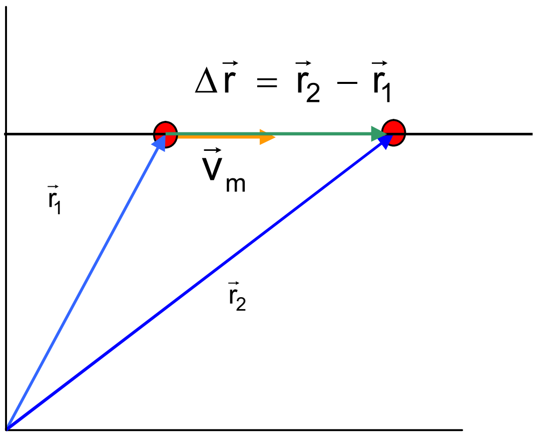
$$v_m = \frac{(25{,}01 - 25{,}00)\,m}{0{,}001\,s} = 10{,}001\,\frac{m}{s}$$

Velocidad instantánea (módulo):

$$\boxed{v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}}$$

Se lee: *"límite de incremento de s, dividido por incremento de t, cuando incremento de t tiende a cero"* o (segunda igualdad) *"derivada de s respecto de t"*.

Usemos ahora vectores para poder dar una definición completa del ***vector velocidad*** (media e instantánea).



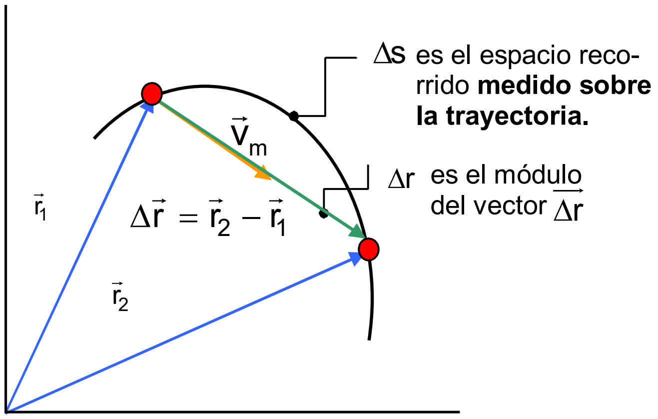
Cuando un móvil se desplaza, desde un punto1 a otro 2, el vector de posición toma los valores $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$ (ver figura). El vector $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ se llama **vector desplazamiento.**

El vector velocidad media se define entonces como:

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t}\Delta\vec{r}$$

El vector velocidad media viene dado por tanto como producto de un número, $\frac{1}{\Delta t}$, por un vector, $\overrightarrow{\Delta r}$. El resultado será un vector:

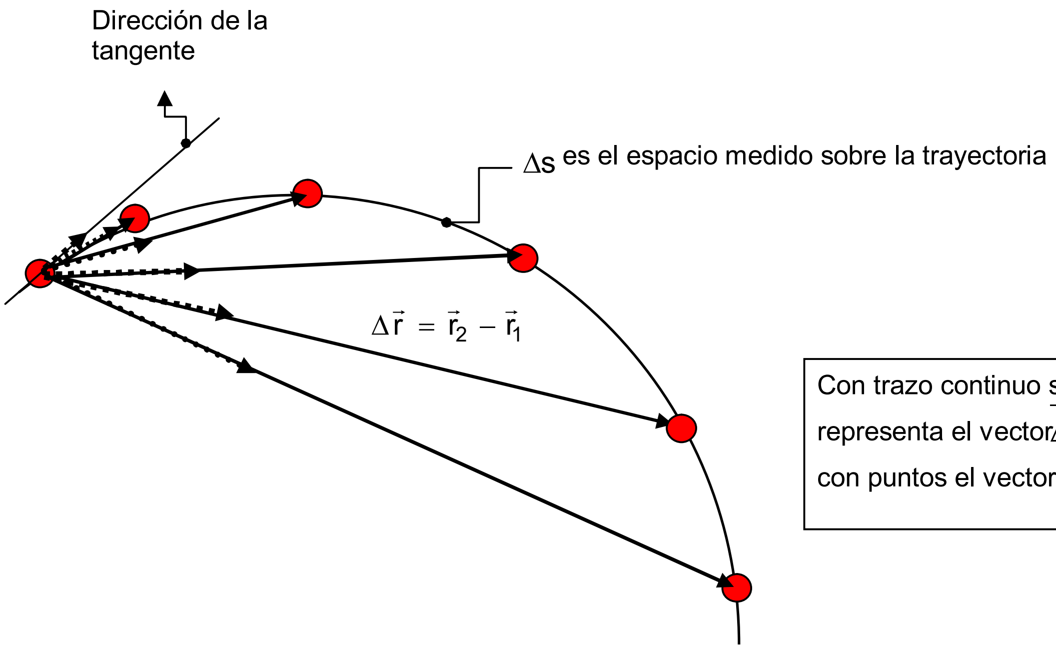
- ***De módulo*** $\frac{\Delta r}{\Delta t}$. Como Δr coincide con el espacio recorrido (Δs), podemos decir que su módulo es $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ (***rapidez*** con que se recorre el espacio).
- ***Su dirección y sentido*** son los de $\overrightarrow{\Delta r}$.



Si la trayectoria es una curva, hemos de hacer algunas (importantes) consideraciones:

- $\Delta r \neq \Delta s$ (ver figura).
- El cociente $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ o **rapidez, ya no es el módulo de la velocidad media.**
- Por tanto, $v_m \neq \frac{\Delta s}{\Delta t}$.

Si partiendo de la situación anterior vamos aproximando cada vez más los puntos, **la dirección de la velocidad media se acerca más y más a la tangente a la curva, e Δr se aproxima a** Δs (ver esquema abajo)
"En el límite" (cuando $\Delta t \to 0$), Δr =, la velocidad media se convierte en instantánea y su dirección coincidirá con la de la tangente en el punto considerado.



Con trazo continuo se representa el vector $\overrightarrow{\Delta r}$ y con puntos el vector $\overrightarrow{v_m}$

Se define el vector velocidad instantánea como: $\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$; $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$

- Lleva la dirección de la tangente.
- Su módulo coincide con la rapidez: $\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \vec{u}_t$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{ds}{dt} \vec{u}_t$$

donde u_t es un vector unitario en la dirección de la tangente a la trayectoria en el punto considerado.

Resumen:

Vector velocidad instantánea

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{ds}{dt} \vec{u}_t$$

Dirección y sentido: El de la tangente en el punto considerado

Módulo: La derivada de s con respecto de t

Vector velocidad media

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} \Delta \vec{r}$$

Dirección y sentido: los de $\Delta \vec{r}$

Módulo: $\frac{\Delta r}{\Delta t}$

Concepto de aceleración

Si estamos estudiando el movimiento de un cuerpo que varía su velocidad, necesitamos definir una magnitud que nos dé ***la rapidez con la cual varía la velocidad***. Esta magnitud es la aceleración. Se define el vector aceleración:

$$\vec{a} = \frac{\left(\vec{v_2} - \vec{v_1}\right)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

Nota

Realmente la expresión dada anteriormente, define el vector aceleración media.

Si el movimiento considerado es tal que la aceleración no es constante, deberíamos distinguir entre aceleración media e instantánea, que se definiría de una manera análoga a lo hecho en el caso de la velocidad:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Moviendo uniformemente acelerado

Un cuerpo se mueve con movimiento uniformemente acelerado si: $\vec{a} = \text{constante}$

La constancia del vector aceleración, implica que se mantenga ***invariable en módulo , dirección y sentido***.

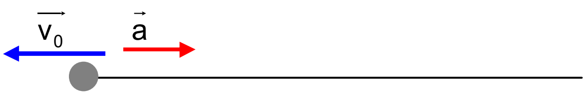
¿Cómo se mueve un objeto para el cual $\vec{a} = \text{constante}$?

La pregunta no es fácil de responder, ya que la trayectoria seguida depende del vector velocidad inicial.

Veamos algunos ejemplos:

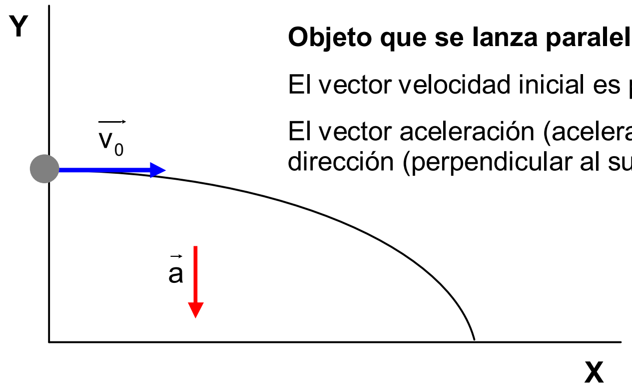
Objeto parado que comienza a acelerar hacia la derecha.

El objeto se moverá en línea recta alejándose cada vez a más velocidad.



Objeto que se mueve inicialmente hacia la izquierda, sometido a una aceleración hacia la derecha.

El objeto se mueve en línea recta e irá disminuyendo su velocidad hasta que se pare y luego comenzará a moverse con velocidad creciente hacia la derecha.



Objeto que se lanza paralelamente al suelo.

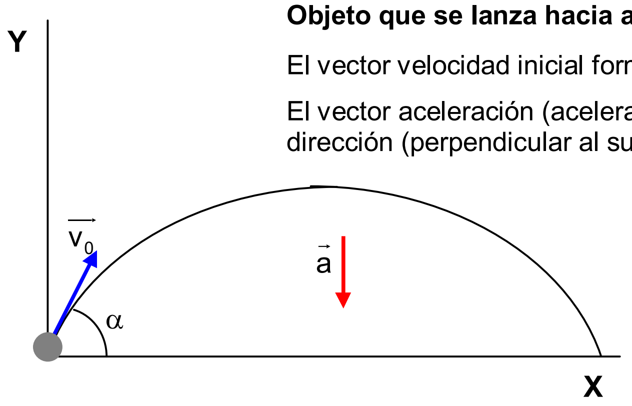
El vector velocidad inicial es paralelo al suelo.

El vector aceleración (aceleración de la gravedad) es constante en módulo (10 m/s^2), dirección (perpendicular al suelo) y sentido (hacia abajo).

Objeto que se lanza hacia arriba con un cierto ángulo.

El vector velocidad inicial forma un ángulo α con la horizontal.

El vector aceleración (aceleración de la gravedad) es constante en módulo (10 m/s^2), dirección (perpendicular al suelo) y sentido (hacia abajo).

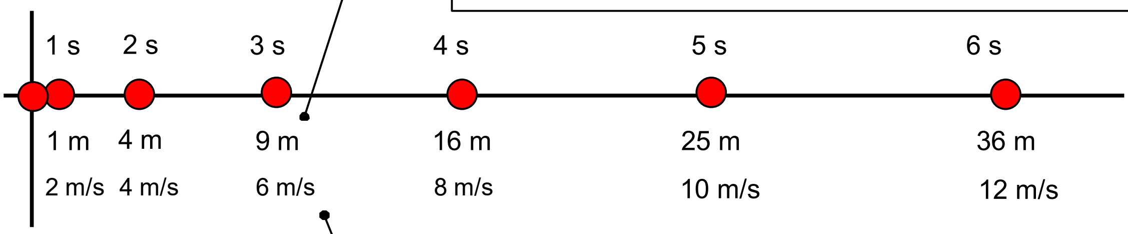


Movimiento rectilíneo y uniformemente acelerado

Un cuerpo se moverá con movimiento rectilíneo y uniformemente acelerado si $\vec{a} = \text{cte.}$ **y su velocidad inicial es nula ($v_0 = 0$) o tiene la misma dirección que el vector aceleración.**

Si se cumplen estas condiciones el cuerpo se mueve variando su velocidad de manera uniforme (siempre la misma cantidad en la unidad de tiempo) y la trayectoria descrita será una línea recta.

Observa que en el mismo intervalo de tiempo (1 s) cada vez recorre más espacio, ya que la velocidad va aumentando.



La velocidad aumenta siempre lo mismo en 1 s. La aceleración es constante. La velocidad aumenta linealmente con el tiempo.

Ecuaciones del movimiento

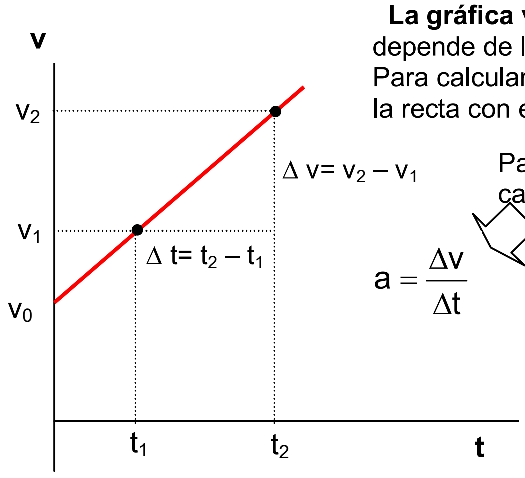
$$\vec{r} = \vec{r_0} + \vec{v_0}\,t + \frac{1}{2}\vec{a}\,t^2 \qquad \vec{v} = \vec{v_0} + \vec{a}\,t$$

Como el movimiento tiene lugar según una línea recta podemos prescindir de la notación vectorial y escribir sencillamente:

$$s = s_0 + v_0\,t + \tfrac{1}{2}\,a\,t^2 \qquad v = v_0 + a\,t$$

Donde:

v_0 = velocidad cuando t =0
s_0 = distancia al origen cuando t =0
s = distancia al origen (puede que no coincida con el espacio recorrido)
t = 0, indica *cuando empieza a contarse el tiempo* (*cuando se pone en marcha el cronómetro).*

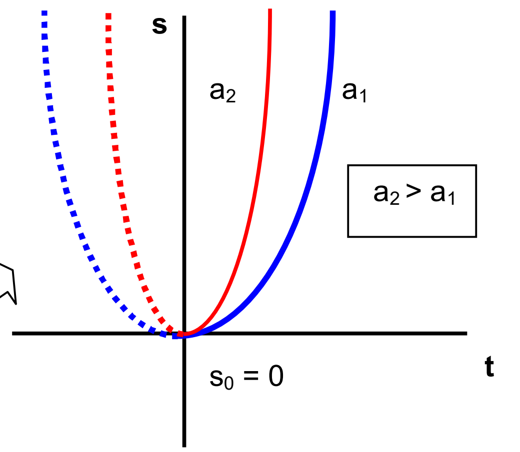


La gráfica v - t es una recta. La inclinación de la recta depende de la aceleración.
Para calcular v_0 hay que determinar el punto de corte de la recta con el eje "v"

Para calcular la aceleración hay que calcular la pendiente de la recta

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

La gráfica s/t es una parábola.
La aceleración es positiva si la parábola se abre hacia arriba y negativa si lo hace hacia abajo.
Cuanto más cerrada sea la parábola, mayor aceleración.
El desplazamiento inicial s_0 se determina viendo el punto de corte con el eje "s".



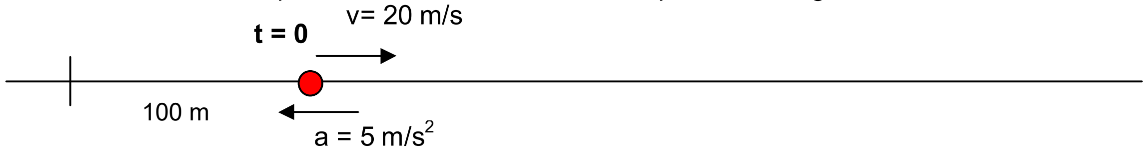
Para escribir las ecuaciones de un movimiento rectilíneo y uniformemente acelerado:

- ✓ Fija el origen a partir del cual se va a medir la distancia.
- ✓ Fija el sentido al que se le asigna signo positivo.
- ✓ Determina el valor de las constantes del movimiento: **a, s_0 , v_0.**
- ✓ Adapta las ecuaciones generales al caso particular sustituyendo los valores de **a, s_0 , v_0** para el caso considerado.

Ten en cuenta que, aunque no usemos notación vectorial, las magnitudes que estás usando: distancia al origen, velocidad, aceleración, son **vectores**. Por tanto, además de un valor (el número), tienen una dirección y un sentido; el signo nos indica el sentido del vector (hacia adonde apunta la flecha).

Ejemplo 1.

Escribe las ecuaciones que describen el movimiento del punto de la figura



Solución:

Ecuaciones generales para el movimiento:

$$v = v_0 + a\,t$$
$$s = s_0 + v_0\,t + ½\,a\,t^2$$

Se toma como origen de distancias la línea vertical.

Sentido positivo hacia la derecha.

Determinación de s_0: ¿ A qué distancia del origen está el punto cuando t =0? s_0 = 100 m

Determinación de v_0: ¿Cuál es la velocidad del punto cuando t =0? v_0 = 20 m/s

Determinación de la aceleración: a = **-** 5 m/s^2 (signo menos, ya que apunta hacia la izquierda).

Ecuaciones particulares para este movimiento:

$$v = 20 - 5\,t$$
$$s = 100 + 20\,t - 2{,}5\,a\,t^2$$

Una vez escritas las ecuaciones se pueden resolver prácticamente todas las cuestiones que se quieran plantear. Solamente hay que *traducir* de nuestro lenguaje al *lenguaje de la ecuación* que solamente sabe de valores de s, v ó t.

Ejemplos: ¿Cuánto tarda en frenar el punto del ejemplo anterior?.

Traducción al *lenguaje ecuación*: ¿qué valor toma t cuando v =0?

Si v = 0 ; 0 = 20 – 5 t ;

$$\boxed{t = \frac{20}{5} = 4\text{ s}}$$

¿Cuál es su velocidad al cabo de 5,3 s?

Traducción *al lenguaje ecuación:* ¿qué valor toma v cuando t = 5,3 s?

Si t = 5,3 s ; v = 20 – 5 . 5,3 = - 6,5 m /s (el signo menos indica que se desplaza hacia la izquierda; después de frenar ha dado la vuelta)

Ejemplo 2

Un cuerpo parte del reposo y comienza a moverse. Los datos tomados se recogen en la tabla adjunta. Indicar qué tipo de movimiento tiene y determinar las ecuaciones para el mismo.

t(s)	s (m)
0	10
1	13
2	22
3	37
4	58
5	85

Solución:

Como se observa en la tabla adjunta el espacio recorrido no varía linealmente con el tiempo. Esto es: en el intervalo de un segundo recorre cada vez más espacio. Esto indica que su velocidad va aumentando. Si se trata de un movimiento uniformemente acelerado el aumento de velocidad, o lo que es lo mismo, **su aceleración, será constante** .

Si el movimiento es uniformemente acelerado deberá cumplir la ecuación: $s = s_0 + v_0\, t + ½\, a\, t^2$.

Como en este caso $v_0 = 0$, la ecuación quedará: $s = s_0 + ½\, a\, t^2$.

Despejando a : $\frac{1}{2}\, a\, t^2 = s - s_0\,;\; a = \frac{2\left(s - s_0\right)}{t^2}$

Usando la ecuación anterior vamos probando con datos correspondientes de *t* y *s* comprobamos si el valor de *a* es constante:

$$a = \frac{2\,(13-10)\ m}{1^{\,2}\ s^2} = 6\ \frac{m}{s^2}\ ;\ a = \frac{2\,(22-10)\ m}{2^{\,2}\ s^2} = 6\ \frac{m}{s^2}\ ;\ a = \frac{2\,(37-10)\ m}{3^{\,2}\ s^2} = 6\ \frac{m}{s^2}$$

Estamos ante un movimiento uniformemente acelerado con $a = 6\ \frac{m}{s^2}$

Para obtener las ecuaciones determinamos el valor de v_0 y s_0 :

$v_0 = 0$, ya que nos lo dicen en el enunciado

$s_0 = 10$ m, ya que es el valor de s cuando t = 0 (ver tabla).

Ecuaciones: $\boxed{\begin{array}{l} v = 6\, t \\ s = 10 + 3\, t^2 \end{array}}$

Ejemplo 3

Una piedra es lanzada verticalmente y hacia arriba con una velocidad de 15 m/s. Determinar:

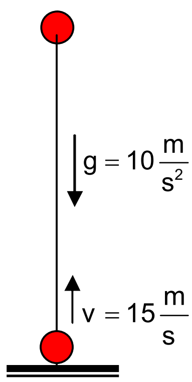
a) Ecuaciones del movimiento.

b) Altura máxima alcanzada.

c) Valor de la velocidad cuando t = 0,8 s y t = 2,3 s. Comentar

Solución:

Esquema:



Origen : el suelo (punto de lanzamiento)

Sentido positivo : hacia arriba

Determinación de v_0: ¿cuál es la velocidad cuando t = 0? El tiempo empieza a contar cuando la piedra sale de la mano. Luego $v_0 = 15$ m/s

Determinación de s_0: ¿a qué distancia del origen está la piedra cuando t =0? Cuando se lanza la piedra está en el punto de lanzamiento (origen). Luego $s_0 = 0$

Determinación del valor de a : $a = g = -10\ m/s^2$. El signo menos se debe a que la aceleración apunta hacia abajo y hemos considerado sentido positivo hacia arriba.

a) Ecuaciones: $\boxed{\begin{array}{l} v = 15 - 10\, t \\ s = 15\, t - 5\, t^{\,2} \end{array}}$

b) ¿Cuál es la altura máxima alcanzada?

Traducción al *lenguaje ecuación:* ¿para que valor de t, v = 0? (ya que en el punto de altura máxima la piedra se detiene durante un instante)

Si v= 0 ; 0 = 15 – 10 t ; $t = \frac{15}{10} = 1{,}5$ s . Tiempo que tarda en alcanzar la altura máxima

Para calcular la altura máxima alcanzada calculamos la distancia a la que se encuentra del origen cuando t = 1,5 s:

$s = h_{max} = 15 \,.\, 1{,}5 - 5 \,.\, 1{,}5^{2} = 11{,}25$ m.

c) Valores de la velocidad:

$v_{(t = 0,8)} = 15 - 10 \,.\, 0{,}8 = 7$ m/s

$v_{(t = 2,3)} = 15 - 10 \,.\, 2{,}3 = -8$ m/s

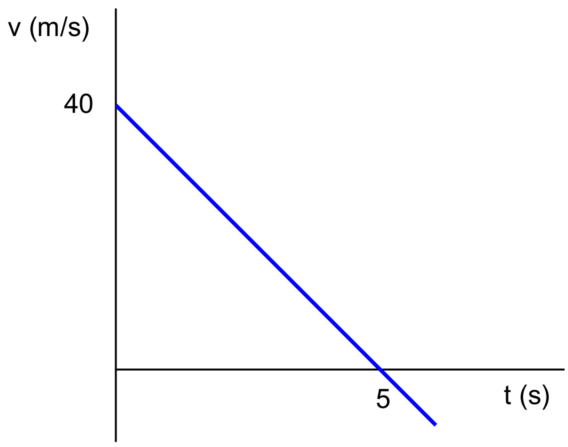
Como se puede observar al cabo de 0,8 s del lanzamiento la piedra aún está en la fase ascendente, ya que el signo de la velocidad es positivo (sentido positivo: hacia arriba). Como se ve su velocidad va disminuyendo, debido a que durante el tramo de ascenso la aceleración lleva sentido contrario a la velocidad (movimiento decelerado)

Al cabo de 2,3 s la piedra se mueve hacia abajo. El signo es negativo: sentido hacia abajo. Efectivamente, a los 1,5 s alcanza la altura máxima, y como la aceleración continúa actuando, comienza su carrera de descenso, pero esta vez al tener el mismo sentido aceleración y velocidad, ésta aumenta.

Ejemplo 4.

La gráfica de la izquierda se ha obtenido tras estudiar el movimiento de un cuerpo.

a) ¿Qué tipo de movimiento tiene?
b) ¿Cuáles son sus ecuaciones?
c) ¿Qué sucede para t = 5 s?



a) La gráfica v – t es una recta con pendiente negativa. Esto nos indica que la velocidad disminuye con el tiempo, pero de forma lineal (la misma cantidad en 1 s). Luego el movimiento es uniformemente acelerado (con aceleración negativa; también se llama decelerado). Para calcular la aceleración (deceleración) calculamos la pendiente de la recta v – t:

$$\text{Pendiente} = a = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{(0-40)\,\frac{m}{s}}{(5-0)\,s} = -8\,\frac{m}{s^2}\,.$$

Observa los valores tomados: $t_1= 0$ $v_1= 40$; $t_2= 5$ $v_2= 0$

b) Como no nos dan datos, podemos tomar para s_0 cualquier valor. Tomaremos $s_0 = 0$

v_0= 40 m/s (leído en la gráfica)

a = - 8 m/s^2 (calculado)

Ecuaciones:
$$\boxed{\begin{array}{l} v = 40 - 8\,t \\ s = 40\,t - 4\,t^2 \end{array}}$$

c) En la gráfica se puede leer que cuando t = 5 s, v = 0. Luego al cabo de 5 s se detiene (es un movimiento decelerado). Si t es mayor de 5 s, observa que la línea en la gráfica v – t rebasa el eje horizontal empezando la velocidad (valores del eje Y) a tomar valores negativos ¿cómo interpretas ésto?