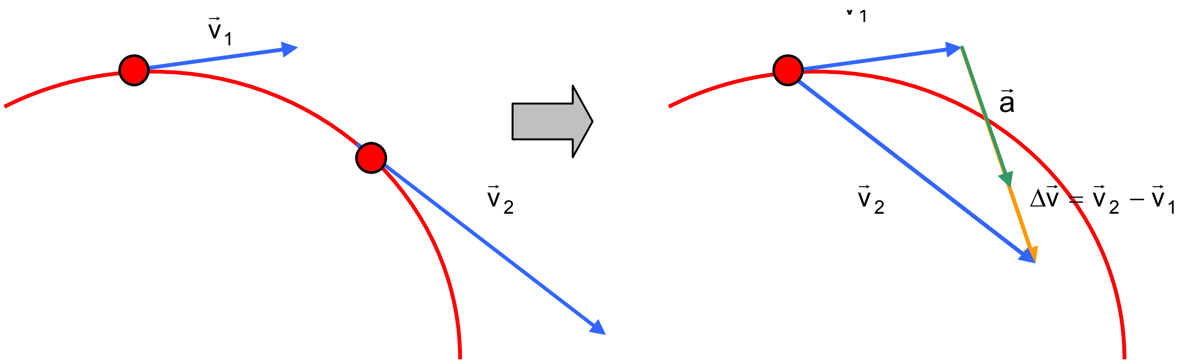
Dpto. Física y Química	**MOVIMIENTO CIRCULAR**	**IES La Magdalena. Avilés. Asturias**

Consideremos una trayectoria curva y un móvil que la recorre variando su velocidad (en módulo) de manera uniforme. Si queremos calcular el vector aceleración, deberemos calcular:

$$\overline{a} = \frac{\overrightarrow{v_2} - \overrightarrow{v_1}}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t}\Delta \vec{v}$$

Por tanto el vector $\vec{a}$ (en verde en la figura) será un vector que apunta en el sentido y dirección del vector $\Delta \vec{v}$ (en naranja en la figura)

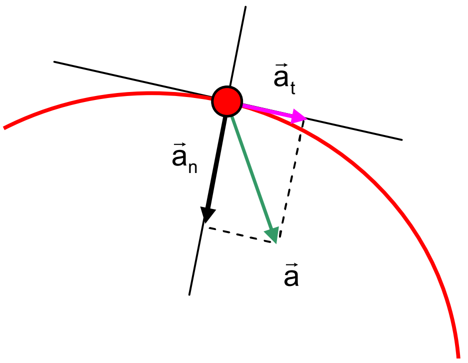


Como se puede ver el vector aceleración , $\vec{a}$, apuntará hacía "el interior" de la curva.

Si consideramos ahora un sistema de ejes coordenados y situamos uno de los ejes en la dirección de la tangente en ese punto y el otro perpendicular y descomponemos el vector $\vec{a}$ según esos ejes, obtenemos dos componentes de la aceleración que apuntan en la dirección de la tangente y perpendicularmente a ésta.

La primera componente se llama **aceleración tangencial** $\vec{a}_t$ y la segunda **aceleración normal** $\vec{a}_n$

$$\vec{a} = \overrightarrow{a_t} + \overrightarrow{a_n}$$



La aceleración tangencial mide la rapidez con que varía el módulo del vector velocidad.

La aceleración normal mide la rapidez con que varía la dirección del vector velocidad.

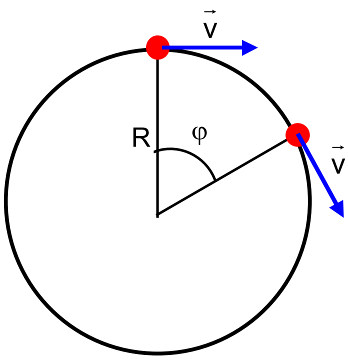
$$\boxed{a_t = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t}} \qquad \boxed{a_n = \frac{v^2}{R}}$$

En el movimiento circular uniforme la trayectoria es una circunferencia que es recorrida con velocidad constante.

Hay que tener en cuenta que aunque el módulo del vector velocidad no varía ($a_t = 0$), **su dirección varía constantemente (por tanto tiene aceleración normal)**

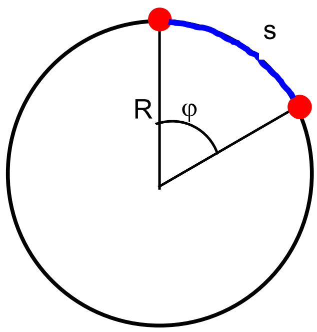
El movimiento circular uniforme tiene aceleración que apunta constantemente en la dirección del centro de la trayectoria. Es la aceleración normal o centrípeta

$$\vec{a} = \overrightarrow{a_n} = \frac{v^2}{R}\vec{u}_n$$



Si se considera un punto girando en una circunferencia es fácil concluir que es mucho más sencillo medir el ángulo girado en un intervalo de tiempo que el arco recorrido (señalado en azul en el dibujo). Por esto se define la **velocidad angular ω** como la rapidez con que se describe el ángulo (φ):

$$\omega = \frac{\varphi}{t} \qquad \omega = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$



El ángulo (φ), debe medirse en **radianes:**

$$\varphi\,(\text{rad}) = \frac{\text{longitud arco (m)}}{\text{radio circunferencia (m)}} = \frac{s}{R}$$

Según esta definición:

1 vuelta = 360 ^{0} = 2 π radianes
½ vuelta = 180 ^{0} = π radianes
¼ de vuelta = 90 ^{0} = π /2 radianes

Para convertir vueltas o grados a radianes:

$$30^0 \cdot \frac{\pi \text{ rad}}{180^0} = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$$

$$0{,}9 \;\cancel{\text{vueltas}} \cdot \frac{2\pi \text{ rad}}{1 \;\cancel{\text{vuelta}}} = 1{,}8\,\pi \text{ rad}$$

En el Sistema Internacional (S.I.) la velocidad angular se mide en $\frac{\text{rad}}{s}$ o en $\frac{1}{s} = s^{-1}$ (el radian no tiene dimensiones)

Otras unidades (no S.I.) son:

$$\frac{\text{vueltas}}{s} \;;\quad \frac{\text{revoluciones}}{\text{min}} = \text{r.p.m}$$

Entre la velocidad lineal y la angular existe la siguiente relación:

$$\boxed{v = \omega \,.\, R}$$

De la definición de velocidad angular (ver más arriba) se deduce la relación entre la velocidad angular ω y el ángulo girado φ**:**

$$\boxed{\varphi = \omega \,.\, t}$$

Si cuando empieza a contarse el tiempo (t = 0) el punto ya ha descrito un ángulo φ_0, entonces el ángulo girado en un tiempo t será:

$$\boxed{\varphi = \varphi_0 + \omega \,.\, t.}$$

El movimiento circular uniforme **es un movimiento periódico**, ya que se repite a intervalos regulares.

Se denomina **periodo (T)** al tiempo que el punto tarda en dar una vuelta (el movimiento se repite).

Se denomina **frecuencia (f)** al número de vueltas que el punto da en un segundo.

Periodo y frecuencia son magnitudes inversamente proporcionales:

$$T = \frac{1}{f} \;;\quad f = \frac{1}{T}; \quad T\,.\,f = 1$$

El periodo se mide en segundos (s) .La frecuencia se mide en s^{-1} o **Hz** (hertzios)

Teniendo en cuenta las definiciones de periodo, frecuencia y velocidad angular, se puede poner:

$$\omega = \frac{2\,\pi}{T} = 2\,\pi\,\frac{1}{T} = 2\,\pi\,f$$

La aceleración normal o centrípeta, para un movimiento circular y uniforme vale:

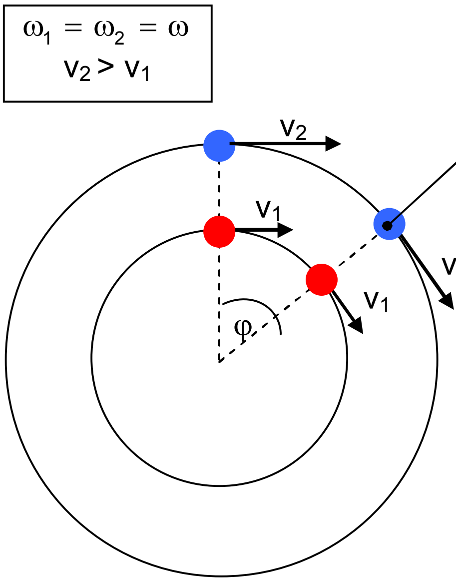
$$\left.\begin{array}{l} a_n = \dfrac{v^2}{R} \\ v = \omega R \end{array}\right\} a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(\omega R)^2}{R} = \frac{\omega^2 R^2}{R} = \omega^2 R$$

Teniendo en cuenta esta expresión podemos comparar las aceleraciones normales o centrípetas para puntos que se mueven con movimiento circular uniforme siguiendo trayectorias distintas;

- Consideremos dos puntos que se mueven con ***idéntica velocidad angular***, uno de ellos situado en la periferia de un disco y el otro más al interior. Según la ecuación que relaciona aceleración normal, velocidad angular y radio:

$$a_n = \omega^2 R$$

La aceleración normal del punto más exterior será mayor, ya que lo es su radio de giro, mientras que ***el punto más interior tendrá una aceleración normal más baja.*** Esto puede parecer desconcertante a primera vista, pero hemos de tener en cuenta que el punto más externo tiene una velocidad lineal (v) mayor (recorre su trayectoria más rápido), lo que trae como consecuencia una mayor rapidez en la variación de la dirección del vector velocidad.



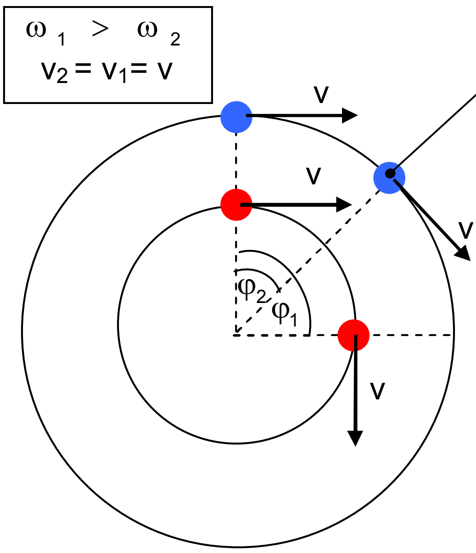
El punto más exterior va más rápido. La dirección del vector velocidad varía más rápidamente que la del punto interior.

Como su velocidad angular es la misma ambos puntos giran el mismo ángulo en un tiempo t, pero el más exterior recorre un mayor espacio sobre su trayectoria (mayor velocidad lineal).

- Considerando ahora dos puntos que recorran trayectorias de distinto radio y ***con la misma velocidad lineal***, tendremos:

$$a_n = \frac{v^2}{R}$$

La aceleración normal será mayor cuanto menor sea el radio. ***El punto que recorre una trayectoria más cerrada tiene una aceleración normal superior***



El punto más exterior gira un ángulo menor. La dirección del vector velocidad varía más lentamente.

Ambos puntos recorren la misma distancia medida sobre la trayectoria en un tiempo t (igual velocidad lineal), por tanto el más interior recorre un ángulo mayor que el más exterior (mayor velocidad angular).
El punto más interior cambia la dirección del vector velocidad más rápido.

Ejemplo 1

Un punto describe una trayectoria circular de 30 cm de radio tardando 3,52 s en dar cinco vueltas. Calcular:

a) La velocidad angular en r.p.m y en rad/s

b) El periodo y la frecuencia del movimiento

c) El ángulo girado al cabo de 0,85 s de iniciado el movimiento.

d) Su aceleración centrípeta

Solución:

a) $$\omega = \frac{5 \text{ vueltas}}{3{,}52 \cancel{s}} \bullet \frac{60 \cancel{s}}{1 \text{ min}} = 85{,}23 \frac{\text{vueltas}}{\text{min}} = 85{,}23 \text{ r.p.m.}$$

$$\omega = \frac{5 \cancel{\text{ vueltas}}}{3{,}52 \text{ s}} \bullet \frac{2\pi \text{ rad}}{1 \cancel{\text{ vuelta}}} = 2{,}84\ \pi \frac{\text{rad}}{\text{s}} = 2{,}84\ \pi \text{ s}^{-1}$$

b) $$T = \frac{3{,}52 \text{ s}}{5} = 0{,}704 \text{ s}$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0{,}704 \text{ s}} = 1{,}420 \text{ s}^{-1} = 1{,}420 \text{ Hz}$$

c) $\varphi = \omega \,.\, t = 2{,}84\ \pi \text{ s}^{-1} \,.\, 0{,}85 \text{ s} = 2{,}41\ \pi \text{ rad} \approx 7{,}58 \text{ rad}$

d) $$a_n = \omega^2 R = (2{,}84\ \pi)^2 \left(\text{s}^{-1}\right)^2 0{,}30 \text{ m} = 23{,}88 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Ejemplo 2

En el laboratorio se estudia el movimiento de un disco, de radio 10 cm, que gira con velocidad constante, midiéndose el tiempo que tarda en dar cinco vueltas. Los valores obtenidos se dan en la tabla adjunta.

Medida	t (s) . Cinco vueltas
1	4,252
2	4,305
3	4,221
4	4,214
5	4,296

a) Calcular la velocidad angular del disco.

b) Determinar la velocidad lineal de un punto de su periferia y de otro situado a 3 cm del centro.

c) ¿Cuánto tardará en girar 120 ^{0}?

Solución:

a) Calculamos el periodo del movimiento (tiempo que tarda en dar una vuelta), hallando la media de los valores obtenidos y dividiendo por cinco:

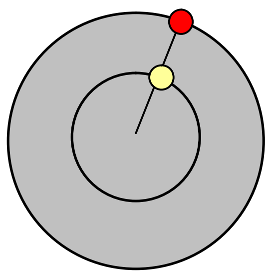
t_{med} = 4,258 s ; T = 0,852 s.

Cálculo de la velocidad angular :

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0{,}852 \text{ s}} = 2{,}35\pi \text{ s}^{-1} \approx 7{,}38 \text{ s}^{-1} = 7{,}38 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

b) Un punto situado en la periferia del disco describirá una circunferencia de radio 10 cm = 0,10 m

$v = \omega \,.\, R = 2{,}35\ \pi \text{ s}^{-1}.\ 0{,}10 \text{ m} = 0{,}235\ \pi \text{ s}^{-1} \approx 0{,}74 \text{ m .s}^{-1} = 0{,}74 \text{ m/s}$



Par el punto situado a 3 cm del centro : R = 3 cm = 0,03 m:

$v = \omega \,.\, R = 2{,}35\ \pi \text{ s}^{-1}.\ 0{,}03\text{m} = 0{,}0705\ \pi \text{ s}^{-1} \approx 0{,}22 \text{ m .s}^{-1} = 0{,}22 \text{ m/s}$

Como se deduce del cálculo ambos puntos giran con idéntica velocidad angular (ω), ya que recorren el mismo ángulo, pero la velocidad lineal aumenta a medida que nos desplazamos hacia la periferia.

c) Pasamos los grados a radianes: $120^0 \dfrac{\pi \text{ rad}}{180^0} = 0{,}67\pi \text{ rad}$

$$\omega = \frac{\varphi}{t} \quad ; \quad t = \frac{\varphi}{\omega} = \frac{0{,}67\pi}{2{,}35\pi \text{ s}^{-1}} = 0{,}283 \text{ s}$$

Ejemplo 3

Un punto recorre una trayectoria circular de radio 36 cm con una frecuencia de 0,25 s^{-1}.

a) Calcular el periodo del movimiento.

b) Calcular la velocidad angular y la lineal.

c) Determinar el ángulo girado en 1,54 s.

d) La aceleración normal o centrípeta.

Solución:

a) $T = \frac{1}{f} = \frac{1}{0,25\ s^{-1}} = 4\ s$

b) $\omega = 2\ \pi\ f = 2\ \pi\ 0,25\ s^{-1} = 0,5\ \pi\ s^{-1} \approx 1,57\ s^{-1}$

$v = \omega\ R = 0,5\ \pi\ s^{-1}\ 0,36\ m = 0,18\ \pi\ m\ s^{-1} = 0,18\ \pi\ m/s \approx 0,57\ m/s$

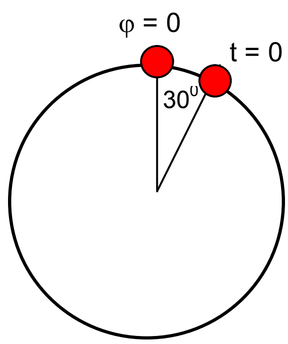
c) $\varphi = \omega\ t = 0,5\ \pi\ m\ s^{-1}\ 1,54\ s = 0,77\ \pi\ rad$

$$0,77\ \pi\ \cancel{rad}\ \frac{180^0}{\pi\ \cancel{rad}} = 138,6^0$$

d) $$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(0,18\ \pi)^2\ \frac{m^{\cancel{2}}}{s^2}}{0,36\ \cancel{m}} = 0,89\frac{m}{s^2}$$

Ejemplo 4

Un punto gira describiendo círculos con velocidad constante de forma tal que describe un ángulo de 180 ^{0} en 1,543 s.



a) Calcular su velocidad angular

b) Determinar el periodo y la frecuencia del movimiento

c) Suponiendo que los ángulos empiezan a contarse a partir del punto más alto de la trayectoria y que el cronómetro se pone en marcha cuando el punto está formando un ángulo de 30^0 con la vertical (ver esquema) ¿en qué posición se encuentra el punto cuando transcurran 2,500 s?

Solución:

a) $\omega = \frac{\pi\ rad}{1,543\ s} = 0,65\ \pi\ \frac{rad}{s} = 0,65\ \pi\ s^{-1}$

b) Tarda 1,543 s en dar media vuelta (180 ^{0}), luego tardará : 2 . 1,543 = 3,086 s en dar una vuelta completa. Por tanto:

T = 3,086 s.

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{3,086\ s} = 0,32\ s^{-1}$$

c) $30^0\ \frac{\pi\ rad}{180} = \frac{\pi}{6}\ rad$

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t = \frac{\pi}{6} + 0,65\ \pi\ s^{-1}\ 2,50\ s = \frac{\pi}{6} + 1,625\ \pi = \pi\ (\frac{1}{6} + 1,625\ ) = 1,79\ \pi\ rad$$

$$1,79\ \pi\ rad\ \frac{180^0}{\pi\ rad} = 322,2^0$$

Movimiento circular uniformemente acelerado

En el movimiento circular uniformemente acelerado la trayectoria es una circunferencia, pero ahora la velocidad angular no se mantiene invariable, sino que varía uniformemente con el tiempo.

Se define la aceleración angular, α, como la rapidez con la que varía la velocidad angular con el tiempo:

$$\boxed{\alpha = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}}$$

Las unidades S.I. para la aceleración angulas son rad/s^2 o s^{-2}.

Las ecuaciones para un movimiento uniformemente acelerado son análogas a las del movimiento rectilíneo y uniformemente acelerado cambiando aceleración lineal por angular, velocidad lineal por angular y distancias por ángulos:

$$\boxed{\begin{aligned} &\omega = \omega_0 + \alpha\, t \\ &\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha\, t^2 \end{aligned}}$$

Recordando la definición de aceleración tangencial y normal vemos que en un movimiento uniformemente acelerado existe, tanto aceleración tangencial (ya que el módulo de la velocidad varía), como normal.

La aceleración tangencial será constante y está relacionada con la aceleración angular:

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= \omega_1 R \\ v_2 &= \omega_2 R \end{aligned}\right\} \Delta v = \Delta\omega\, R; \quad \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} R\, ; \quad \boxed{a_t = \alpha\, R}$$

La aceleración normal también existe (ya que varía la dirección del vector velocidad), pero ahora variará constantemente al hacerlo el módulo de la velocidad lineal. Por tanto el vector aceleración vendrá dado por la suma (vectorial) de ambas componentes:

$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n}$$

Ejemplo 5

Un punto se mueve describiendo una circunferencia de radio 0,5 m con una velocidad de 1,2 rad/s cuando comienza a aumentar su velocidad de forma uniforme a razón de 2 m/s cada segundo.

a) Obtener las ecuaciones que describen el movimiento del punto.

b) Calcular el valor de la aceleración tangencial y normal al cabo de 3,6 s

Solución:

a) Como la velocidad aumenta de forma uniforme con el tiempo el movimiento es circular y uniforme y su aceleración tangencial vale:

$$a_t = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{2\,\frac{m}{s}}{1\,s} = 2\,\frac{m}{s^2}$$

Luego: $$\alpha = \frac{a_t}{R} = \frac{2\,\frac{m}{s^2}}{0,5\,m} = 4\,s^{-2} = 4\,\frac{rad}{s^2}$$

Las ecuaciones serán entonces: $\omega = \omega_0 + \alpha\, t = 1{,}2 + 4\ t$

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha\, t^2 = 1{,}2\ t + 2\ t^2$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\omega = 1{,}2 + 4\ t \\ &\varphi = 1{,}2\ t + 2\ t^2 \end{aligned}}$$

b) La aceleración tangencial será constante. Por tanto: $a_t = 2\ \frac{m}{s^2}$

La aceleración normal varía con el tiempo. Al cabo de 3,6 s la velocidad angular valdrá:

$$\omega_{(t=3,6)} = 1{,}2 + 4\ t =,2 + 4\ (3{,}6) = 15{,}6 \frac{rad}{s} = 15{,}6\ s^{-1}$$

y la aceleración normal o centrípeta:

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2\ R = 15{,}6\ s^{-2}.\ 0{,}50\ m = 121{,}7\ \frac{m}{s^2}$$

Ejemplo 6

Un punto se mueve describiendo una circunferencia de radio 80 cm con una velocidad de 12 rad/s cuando comienza a frenar y su velocidad disminuye a razón de 2,6 rad/s cada segundo.

a) Obtener las ecuaciones que describen el movimiento del punto.
b) Calcular el tiempo que tarda en frenar y las vueltas que da hasta que frena.

Solución:

a) $\alpha = 2{,}6 \frac{rad}{s^2} = 2{,}6\ s^{-2}$

$$\omega = \omega_0 + \alpha\, t = 12 - 2{,}6\ t$$

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha\, t^2 = 12\ t - 1{,}3\ t^2$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\omega = 12 - 2{,}6\ t \\ &\varphi = 12\ t - 1{,}3\ t^2 \end{aligned}}$$

b) Tiempo que tarda en frenar: $\omega = 12 - 2{,}6\ t$

$$0 = 12 - 2{,}6\ t\ ;\ t = \frac{12\ s^{-1}}{2{,}6\ s^{-2}} = 4{,}6\ s$$

Vueltas que da hasta que se para:

$$\varphi = 12\ t - 1{,}3\ t^2 = 12\ (4{,}6) - 1{,}3\ (4{,}6)^2 = 27{,}7\ rad$$

$$27{,}7\ \cancel{rad}\ \frac{1\ vuelta}{2\pi\ \cancel{rad}} = 4{,}4\ vueltas$$