

En el s. XVI **Nicolás Copérnico (1473 – 1543)** propuso una hipótesis revolucionaria para explicar el movimiento de los planetas: el Sol pasaba a ser el centro del sistema (lugar que hasta entonces había ocupado la Tierra) y los planetas se movían en órbitas circulares en torno suyo.

Casi un siglo después **Johannes Kepler (1571 – 1630)** tras un concienzudo análisis de miles de datos astronómicos recopilados por el astrónomo Tycho Brahe enunció las leyes del movimiento planetario (hoy conocidas como **Leyes de Kepler**)

Leyes de Kepler

• **Primera Ley de Kepler (1609)**

"Los planetas describen órbitas elípticas, estando el sol en uno de sus focos."

• **Segunda Ley de Kepler (1609)**

"El vector de posición de cualquier planeta con respecto del Sol (vector que tiene el origen en el Sol y su extremo en el planeta considerado) barre áreas iguales en tiempos iguales."

En la figura (si se supone que t es el mismo): $A_1 = A_2$

De forma general: $\frac{A_1}{t} = \frac{A_2}{t}$. El cociente $v_A = \frac{A}{t}$ mide la rapidez con que el radio vector barre

el área A y se conoce como **velocidad areolar**, luego podemos enunciar la segunda ley de una forma alternativa diciendo que *"los planetas describen sus órbitas alrededor del Sol con velocidad areolar constante"*.

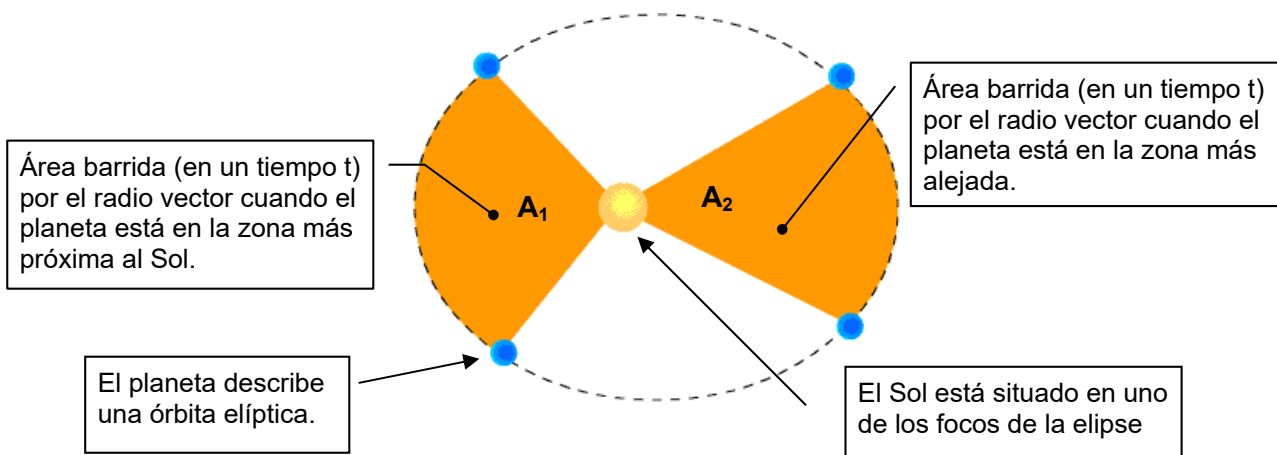
• **Tercera Ley de Kepler (1619)**

"Los cuadrados de los periodos de revolución (T) son proporcionales a los cubos de las distancias promedio de los planetas al sol (r)."

$$T^2 = k r^3$$

Donde **k** es una constante de proporcionalidad (constante de Kepler) que depende de la masa del astro central. Para el Sistema Solar: $k = 3 \cdot 10^{-19} \text{ s}^2/\text{m}^3$

r coincide con el valor del **semieje mayor** para órbitas elípticas.



¿Cuánto de elíptica?

Aunque estrictamente la órbita descrita por la Tierra en su movimiento alrededor del Sol es una elipse, realmente se aproxima mucho a un círculo.

La excentricidad de la elipse para la órbita terrestre tiene un valor $e = 0,017$. Una excentricidad cero corresponde a un círculo. Cuanto más se aleje de cero más aplanada será la elipse. El valor máximo, 1, se correspondería con una recta.

La distancia de la Tierra al Sol en el punto más próximo (perihelio) es de 147 100 000 km.

La distancia de la Tierra al Sol en el punto más alejado (afelio) es de 152 100 000 km.

Aunque la diferencia (5 000 000 km) puede parecer considerable, en realidad se corresponde con un escaso 3 % de diferencia entre ambos valores.

Ejemplo 1

La Tierra orbita alrededor del Sol con un periodo de 365,25 días. Calcular la distancia media entre la Tierra y el Sol.

DATOS: La constante de Kepler para el Sistema Solar vale: $k = 3 \cdot 10^{-19} \text{ s}^2/\text{m}^3$

Solución:

Partimos de la tercera ley de Kepler: $T^2 = k r^3$ y despejamos la incógnita (r):

$$r = \sqrt[3]{\frac{T^2}{k}} = \sqrt[3]{\frac{(3,16 \cdot 10^7)^2 \text{ s}^2}{3 \cdot 10^{-19} \frac{\text{s}^2}{\text{m}^3}}} = 1,49 \cdot 10^{11} \text{ m} = 1,49 \cdot 10^8 \text{ km} = 149 \cdot 10^6 \text{ km}$$

NOTA: La distancia media entre el Sol y la Tierra es de unos 150 millones de km (149 597 870 km) y es usada en astronomía como unidad para medir distancias. Se le da el nombre de **unidad astronómica (ua)**.

Ejemplo 2

Marte se encuentra situado a una distancia media del Sol de 1,52 ua. ¿Cuál es el periodo orbital de Marte alrededor del Sol?

DATOS: 1 ua = 150 · 10⁶ km; $k = 3 \cdot 10^{-19} \text{ s}^2/\text{m}^3$

Solución:

$$1,52 \text{ ua} \frac{1,50 \cdot 10^{11} \text{ m}}{1 \text{ ua}} = 2,28 \cdot 10^{11} \text{ m}$$

Partimos de la tercera ley de Kepler: $T^2 = k r^3$ y despejamos la incógnita (T):

$$T = \sqrt{k r^3} = \sqrt{3 \cdot 10^{-19} \frac{\text{s}^2}{\text{m}^3} (2,28 \cdot 10^{11})^3 \text{ m}^3} = 5,96 \cdot 10^7 \text{ s} = 690,2 \text{ días}$$

NOTA: El periodo orbital para Marte ("año marciano") es de 686,98 días.

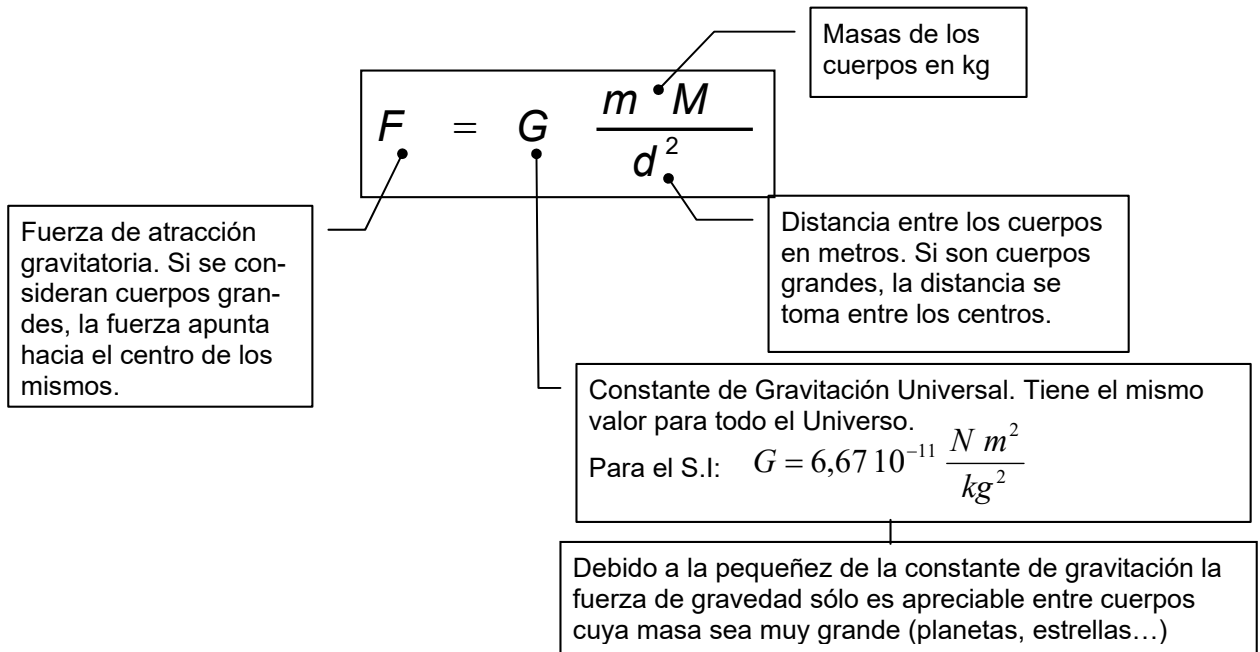
Las leyes de Kepler son fenomenológicas. Es decir, se limitan a describir de manera cinemática cómo se mueven los planetas en sus órbitas alrededor del Sol, **pero nada dicen acerca de las causas que provocan ese movimiento.**

Aunque las leyes fueron enunciadas inicialmente para el Sistema Solar son aplicables a cualquier objeto celeste que orbite alrededor de otro astro central.

Fue **Isaac Newton (1642 – 1727)** quien dio el siguiente gran paso en la explicación del movimiento planetario al enunciar su **Ley de Gravitación Universal** (formulada en 1666 y publicada en 1687)

Ley de Gravitación Universal

“Los cuerpos se atraen con una fuerza directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que los separa.”



De acuerdo con la expresión anterior dos masas de 100 y 1000 kg, situadas a 20 m de distancia se atraerán con un fuerza de:

$$F = G \frac{m M}{d^2} = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2} \frac{100 \cdot 1000}{20^2} = 1,67 \cdot 10^{-8} N$$

Fuerza prácticamente inmedible debido a su pequeñez.

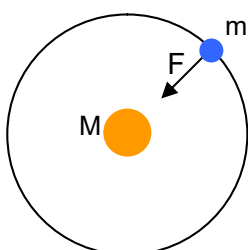
Sin embargo, la fuerza con que la Tierra ($6,0 \cdot 10^{24}$ kg) atrae a un cuerpo de 50 kg situado en su superficie (distancia al centro de la Tierra $6,4 \cdot 10^6$ m) valdrá:

$$F = G \frac{m M}{R^2} = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2} \frac{50 \cdot 6 \cdot 10^{24}}{(6,4 \cdot 10^6)^2} = 488,5 N$$

Que es una fuerza apreciable ya que la masa de la Tierra es muy grande.

Si suponemos una órbita circular (lo cual no está muy alejado de la realidad) podemos combinar la Ley de Gravitación Universal con la dinámica del movimiento circular para obtener datos de la órbita. Por ejemplo, la aceleración centrípeta de la Tierra debida a su movimiento de traslación alrededor del Sol.

Datos: Masa del Sol: $1,98 \cdot 10^{30}$ kg
Distancia (media) Tierra – Sol : $1,5 \cdot 10^{12}$ m



$$\left. \begin{aligned} F_c &= m a_N \\ F &= G \frac{m M}{d^2} \end{aligned} \right\} m a_N = G \frac{m M}{d^2}; \quad a_N = G \frac{M}{d^2}$$

$$a_N = G \frac{M}{d^2} = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2} \frac{1,98 \cdot 10^{30} \cdot kg}{(1,5 \cdot 10^{12})^2 m^2} = 5,87 \cdot 10^{-5} \frac{m}{s^2}$$

La Ley de Gravitación Universal representa un mayor nivel de profundización en la comprensión del universo que las leyes de Kepler. Estas son puramente descriptivas, dicen **cómo se mueven los astros**, sin embargo la fuerza gravitatoria propuesta por Newton aparece como **la causa** que determina el movimiento de los objetos celestes.

- El propio Newton demostró (utilizando un procedimiento matemático inventado por él mismo, similar al cálculo diferencial y que denominó *método de fluxiones*) que si un cuerpo se mueve alrededor de otro por el que es atraído con una fuerza proporcional a sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia describiría una elipse, tal y como se postula en la primera ley de Kepler.
- La constancia de la velocidad areolar (segunda ley de Kepler) también es deducible (no se hace aquí, debido a los conceptos matemáticos implicados) a partir de la fuerza de atracción gravitatoria.
- La tercera ley de Kepler puede obtenerse teniendo en cuenta la expresión de la Ley de Gravitación Universal y considerando que los planetas describen su órbita con movimiento circular uniforme, sometidos a la fuerza de gravedad que apunta constantemente hacia el centro de la trayectoria (fuerza centrípeta)

$$\left. \begin{array}{l} F_c = m a_N = m \omega^2 d \\ F = G \frac{m M}{d^2} \end{array} \right\} G \frac{m M}{d^2} = m \omega^2 d ; G M = \frac{(2\pi)^2}{T^2} d^3 ; T^2 = \frac{4\pi^2 d^3}{G M} ; T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{G M} \right) d^3 ; \boxed{T^2 = k d^3}$$

Donde: $\boxed{k = \frac{4\pi^2}{G M}}$ Por tanto la constante de Kepler sólo depende del valor de la masa del astro central.

Para el Sistema Solar tendrá un valor (S.I.): $k = \frac{4\pi^2}{G M} = \frac{4\pi^2}{6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2} 1,98 \cdot 10^{30} \text{ kg}} = 2,99 \cdot 10^{-19} \frac{\text{s}^2}{\text{m}^3}$

Ejemplo 3

Ío es una de las sesenta y tres lunas de Júpiter (la más próxima al planeta) y tiene un periodo orbital de 1 día 18 h y 28 min. ¿Cuál es la distancia media entre Ío y Júpiter?

DATOS: Masa de Júpiter: $1,90 \cdot 10^{27} \text{ kg}$

Solución:

Expresamos el periodo orbital en segundos:

$$1 \text{ día } 18 \text{ h y } 28 \text{ min} = 152 \ 880 \text{ s}$$

Partimos de la tercera ley de Kepler: $T^2 = k r^3$ y despejamos la incógnita (r): $r = \sqrt[3]{\frac{T^2}{k}}$

Hay que tener en cuenta que el astro central alrededor del cual orbita Ío es Júpiter, no el Sol. Por **tanto deberemos determinar el valor de k para este caso sustituyendo la masa de Júpiter** en la expresión que nos da la constante de Kepler (ver apuntes)

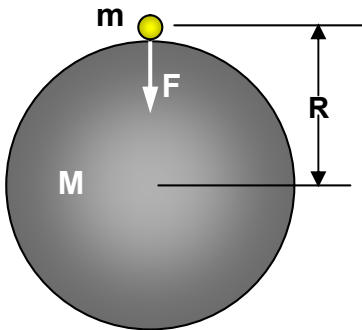
$$k = \frac{4\pi^2}{G M} = \frac{4\pi^2}{6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2} 1,90 \cdot 10^{27} \text{ kg}} = 3,12 \cdot 10^{-16} \frac{\text{s}^2}{\text{m}^3}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{T^2}{k}} = \sqrt[3]{\frac{(1,53 \cdot 10^5)^2 \cancel{\text{s}^2}}{3,12 \cdot 10^{-16} \frac{\cancel{\text{s}^2}}{\text{m}^3}}} = 4,22 \cdot 10^8 \text{ m} = 4,22 \cdot 10^5 \text{ km} = 422 \ 000 \text{ km}$$

NOTA: El radio orbital medio de Ío alrededor de Júpiter se estima en 421 600 km

La Ley de Gravitación Universal nos permite explicar muchas cosas más, entre ellas el hecho de que todos los cuerpos caigan sometidos a la misma aceleración ($9,81 \text{ m/s}^2$) con independencia de su masa.

Según la segunda ley de Newton los cuerpos aceleran en su caída porque son atraídos por la Tierra y llamamos peso a la fuerza con que el cuerpo es atraído. Si llamamos "g" al valor de la aceleración podemos calcular el peso de un cuerpo de masa m (fuerza con que es atraído por la Tierra): $P = m g$.



Si nos imaginamos ahora el mismo cuerpo situado sobre la superficie de la Tierra (ver figura), según lo visto más arriba será atraído hacia su centro con una fuerza (peso) dada por:

$$F = G \frac{m M}{R^2}$$

Por tanto:

$$\left. \begin{aligned} F &= G \frac{m M}{R^2} \\ P &= m g \end{aligned} \right\} P = F ; \cancel{m} g = G \frac{\cancel{m} M}{R^2} ; \boxed{g = G \frac{M}{R^2}}$$

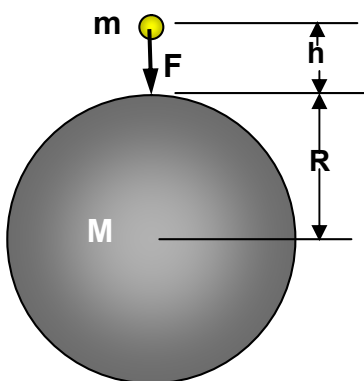
Debido a que la fuerza de atracción gravitatoria es proporcional a la masa del objeto, el valor de la aceleración de la gravedad es independiente de la misma. Sólo depende de valores propios del planeta como son su masa y su radio

Para la Tierra ($M = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ y $R = 6,37 \cdot 10^6 \text{ m}$):

$$g = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\cancel{\text{m}^3} \text{ kg}}{\cancel{\text{kg}} \text{ s}^2} \frac{5,97 \cdot 10^{24} \cancel{\text{kg}}}{(6,37 \cdot 10^6)^2 \cancel{\text{m}^2}} = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Rigurosamente el valor de g no es constante en todo el planeta, ya que prescindiendo de otros efectos (la rotación, por ejemplo, influye), el radio de la Tierra en el Ecuador es mayor que en los Polos, por tanto el valor de "g" aumenta del Ecuador a los Polos donde adquiere su valor más alto.

Si nos alejamos de la superficie terrestre el valor de la gravedad también variará, ya que entonces:



$$\boxed{g = G \frac{M}{(R+h)^2}}$$

Así para $h = 30 \text{ km}$, tenemos:

$$g = G \frac{M}{(R+h)^2} = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\cancel{\text{m}^3} \text{ kg}}{\cancel{\text{kg}} \text{ s}^2} \frac{6,0 \cdot 10^{24} \cancel{\text{kg}}}{(6,4 \cdot 10^6 + 3 \cdot 10^4)^2 \cancel{\text{m}^2}} = 9,68 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Como se puede observar en el cálculo, la variación de la gravedad con la altura no es grande si se consideran alturas pequeñas comparadas con el valor del radio terrestre ($6,37 \cdot 10^6 \text{ m}$). En estos casos no se comete un error apreciable al considerar "g" como constante. Efectivamente, llamando g_0 al valor de la gravedad en la superficie de la Tierra, tenemos:

$$g_0 = G \frac{M}{R^2}$$

$$g = G \frac{M}{(R+h)^2} = G \frac{M}{R^2} \frac{R^2}{(R+h)^2} = g_0 \frac{R^2}{(R+h)^2} \approx g_0 \quad \text{Si : } h \ll R$$

Ejemplo 5

Calcular el valor de la aceleración de la gravedad en Mercurio sabiendo que tiene una masa de $3,30 \cdot 10^{23}$ kg y un radio de 2440 km

Solución:

El valor de la aceleración de la gravedad en un planeta depende de la masa y radio del planeta, y se puede calcular a partir de la expresión (ver más arriba):

$$g = G \frac{M}{R^2}$$

Sustituyendo los datos y operando:

$$g = G \frac{M}{R^2} = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2} \frac{3,30 \cdot 10^{23} \text{ kg}}{(2,44 \cdot 10^6)^2 \text{ m}^2} = 3,70 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Ejemplo 6

El valor de la gravedad varía si nos alejamos de la superficie terrestre. Calcular a qué altura deberemos situarnos de la superficie de la Tierra para que $g = 5 \text{ m/s}^2$

DATOS: Considerar $g = 10 \text{ m/s}^2$ como valor en la superficie.

Masa de la Tierra: $6,0 \cdot 10^{24}$ kg. Radio de la Tierra: 6400 km.

Solución:

El valor de la gravedad para un punto situado a una altura h sobre la superficie terrestre viene dado por:

$$g = G \frac{M}{(R+h)^2}$$

Despejamos $(R+h)^2$ y, posteriormente restamos el valor de R (en km) según se puede ver a continuación:

$$(R+h)^2 = G \frac{M}{g} = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2} \frac{6,0 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 8,0 \cdot 10^{13} \text{ m}^2$$

$$(R+h)^2 = 8,0 \cdot 10^{13} \text{ m}^2 ; R+h = \sqrt{8,0 \cdot 10^{13} \text{ m}^2} = 8,94 \cdot 10^6 \text{ m} = 8,94 \cdot 10^3 \text{ km} = 8940 \text{ km}$$

$$R+h = 8940 \text{ km} ; h = 8940 - R ; h = 8940 \text{ km} - 6400 \text{ km} = 2540 \text{ km}$$

Fuerzas entre cargas. Ley de Coulomb

La materia puede tener carga eléctrica. De hecho en los átomos existen partículas con carga eléctrica positiva (protones) y otras con carga eléctrica negativa (electrones)

La unidad S.I de carga eléctrica es el culombio (C), aunque como resulta excesivamente grande, en la práctica se utilizan submúltiplos de la misma:

Microculombio (μC). $1 \mu\text{C} = 10^{-6} \text{ C}$

Nanoculombio (nC) . $1 \text{ n C} = 10^{-9} \text{ C}$

Picoculombio (pC). $1 \text{ pC} = 10^{-12} \text{ C}$

Es un hecho experimental conocido que cargas de distinto signo se atraen y del mismo se repelen.

La fuerza ejercida entre dos cargas (supuestas puntuales) viene descrita por la **Ley de Coulomb** (1785) que establece que **la fuerza con que dos cargas se atraen o se repelen es directamente proporcional al producto de las cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa:**

$$F = k \frac{Qq}{d^2}$$

Normalmente el valor de k se escribe en función de una nueva constante, característica de cada medio, llamada **permitividad o constante dieléctrica del medio, ϵ** .

(En física los aislantes reciben el nombre de *dieléctricos* de ahí el nombre de constante dieléctrica)

$$k = \frac{1}{4 \pi \epsilon}$$

Para el S.I y para el vacío o el aire la constante dieléctrica (ϵ_0) vale:

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} \frac{\text{C}^2}{\text{N} \cdot \text{m}^2}$$

Por tanto el valor de k para el aire o el vacío valdrá :

$$k = \frac{1}{\cancel{4\pi} \frac{1}{\cancel{4\pi} 9 \cdot 10^9} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2}} = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2}$$

Se puede considerar que la constante dieléctrica da idea de la capacidad del medio para transmitir la interacción eléctrica.

En un medio con un constante dieléctrica alta (k, pequeña) la fuerza entre dos cargas será más pequeña que en otro en el que la constante dieléctrica sea baja (k, grande). El primer medio "transmite" peor la interacción entre cargas. Es decir, es más aislante.

La carga eléctrica más pequeña que se puede encontrar en la naturaleza es la que portan el electrón o el protón (ambos tienen idéntica carga pero de signo contrario), por eso recibe el nombre de **"carga eléctrica elemental"**:

$q = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

La constante de proporcionalidad, k, depende del medio en el que estén situadas las cargas (vacío, aire, agua...) y para el vacío o el aire, y en unidades S.I, vale:

$k = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2}$

Rigurosamente la expresión de la Ley de Coulomb debería ser una expresión vectorial:

$$\vec{F} = k \frac{Qq}{d^2} \vec{u}_r$$

Donde \vec{u}_r es un vector unitario cuya dirección viene dada por la línea que une ambas cargas, y sentido siempre saliente respecto de la carga que ejerce la fuerza.

Por tanto si la fuerza es positiva tiene el mismo sentido que \vec{u}_r y si es negativa, sentido contrario.



Fuerza ejercida sobre una carga positiva. La fuerza tiene el mismo sentido que \vec{u}_r



Fuerza ejercida sobre una carga negativa. La fuerza tiene sentido contrario a \vec{u}_r

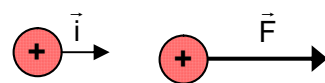
Ejemplo 1

Calcular la fuerza entre dos cargas:

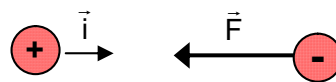
- a) De + 5 μC y +3 μC situadas a 10 cm. b) De + 5 μC y -3 μC situadas a 10 cm.

Solución 1 (usando notación vectorial):

$$\text{a) } \vec{F} = k \frac{qQ}{d^2} \vec{u}_r = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \frac{3 \cdot 10^{-6} \text{ C} \cdot 5 \cdot 10^{-6} \text{ C}}{0,10^2 \text{ m}^2} \vec{i} = 13,5 \vec{i} \text{ (N)}$$



$$\text{b) } \vec{F} = k \frac{qQ}{d^2} \vec{u}_r = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \frac{(-3 \cdot 10^{-6} \text{ C}) \cdot 5 \cdot 10^{-6} \text{ C}}{0,10^2 \text{ m}^2} \vec{i} = -13,5 \vec{i} \text{ (N)}$$



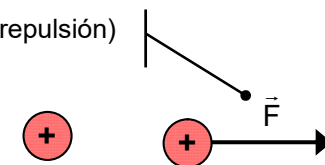
El ejercicio puede resolverse sin usar notación vectorial. Si se opta por este procedimiento tendremos en cuenta si la interacción es atractiva o repulsiva para dibujar primero el vector fuerza y usaremos la expresión de la ley de Coulomb para calcular su módulo. Para esto consideramos las cargas **siempre como positivas** (aunque tengan signo negativo), ya que el signo nos daría la dirección del vector fuerza si usáramos la notación vectorial (ver arriba).

Solución 2 (sin usar notación vectorial):

Fuerza hacia la derecha (repulsión)

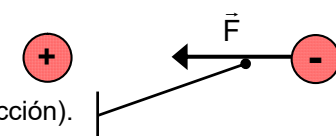
a)

$$F = k \frac{qQ}{d^2} = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \frac{3 \cdot 10^{-6} \text{ C} \cdot 5 \cdot 10^{-6} \text{ C}}{0,10^2 \text{ m}^2} = 13,5 \text{ N}$$



b)

$$F = k \frac{qQ}{d^2} = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \frac{3 \cdot 10^{-6} \text{ C} \cdot 5 \cdot 10^{-6} \text{ C}}{0,10^2 \text{ m}^2} = 13,5 \text{ N}$$



Fuerza hacia la izquierda (atracción).

Ley de Gravitación Universal

$$\vec{F} = -G \frac{m M}{r^2} \vec{u}_r$$

Ley de Coulomb

$$\vec{F} = K \frac{q Q}{r^2} \vec{u}_r$$

- **Tanto la interacción gravitatoria como la eléctrica son consecuencia de la existencia de propiedades inherentes a la materia: la masa y la carga.**
- Todo cuerpo que posea masa será sensible a la interacción gravitatoria. Todo objeto que posea carga neta será sensible a la interacción eléctrica. Cuanto mayor sea la masa o la carga de los cuerpos, mayor es su interacción gravitatoria o eléctrica.
- **Ambas interacciones decrecen muy rápidamente a medida que nos alejamos.**
- **La interacción gravitatoria es siempre atractiva, mientras que la interacción eléctrica puede ser atractiva o repulsiva en función del signo de las cargas.**
- **El pequeño valor de la constante de gravitación universal (G) hace que la fuerza de atracción gravitatoria sea despreciable** a no ser que las masa implicadas sean muy grandes (astros). La fuerza de gravedad es la interacción que domina a nivel cosmológico.
- **El valor de la constante que aparece en la Ley de Coulomb (K) hace que la fuerza eléctrica sea apreciable incluso cuando consideramos cargas eléctricas muy pequeñas.** La interacción eléctrica es la dominante a nivel de átomos y moléculas, haciendo posible la existencia de las unidades estructurales básicas que forman la materia (los átomos).
- **La interacción gravitatoria no depende del medio en el que se encuentren las masas (aire, vacío, agua...), mientras que la naturaleza del medio sí influye en el valor de la interacción eléctrica.** Unos medios transmiten mejor la interacción eléctrica que otros.
- **La fuerza eléctrica y la gravitatoria son fuerzas conservativas.**