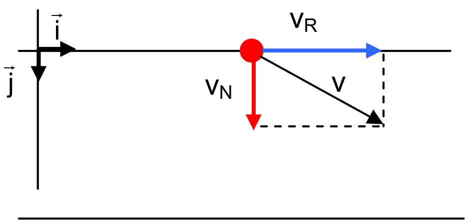
Puede ocurrir que un cuerpo esté sometido, simultáneamente, a dos movimientos. Un ejemplo típico de esto es el nadador que trata de alcanzar la orilla opuesta de un río nadando en dirección perpendicular a la corriente (ver esquema).

La velocidad resultante (suma de vectores) será: $\vec{v} = \vec{v}_N + \vec{v}_R$

v_N = velocidad del nadador

v_R = velocidad de la corriente (río)



Las ecuaciones para este movimiento serían (considerando el origen situado en el punto de partida del nadador y ***sentido positivo hacia la derecha y hacia abajo***):

$$\boxed{\vec{v} = v_R\,\vec{i} + v_N\,\vec{j}} \qquad \boxed{\vec{r} = \vec{v}\,t = (v_R t)\,\vec{i} + (v_N t)\,\vec{j}}$$

Ejemplo 1.

V_N = 0,8 m/s. V_R = 2,0 m/s

Ecuaciones: $\boxed{\vec{v} = 2{,}0\,\vec{i} + 0{,}8\,\vec{j}}$

La velocidad es constante (MRU).

$$\boxed{\vec{r} = \vec{v}\,t = (2{,}0\,t)\,\vec{i} + (0{,}8\,t)\,\vec{j}}$$

El vector de posición tiene la misma dirección que el vector velocidad ya que se obtiene multiplicando este por el escalar t (tiempo).

Posición y velocidad al cabo de 2,5 s:

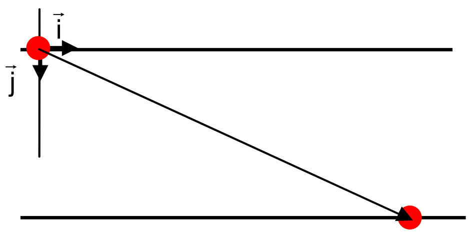
$$\vec{v} = 2{,}0\vec{i} + 0{,}8\vec{j}\ ;\ v = \sqrt{\left(2{,}0^2 + 0{,}8^2\right)\frac{m^2}{s^2}} = 2{,}15\ \frac{m}{s}$$

$$\vec{r} = \vec{v}\,t = (2{,}0\,t)\,\vec{i} + (0{,}8\,t)\,\vec{j} = 5{,}0\,i + 2{,}0\,\vec{j}$$

5,0 m hacia la derecha y 2,0 m hacia abajo del punto de partida.

Si el río tiene 10 m de ancho ¿En qué punto alcanzará la orilla opuesta?

Cuando alcance la orilla opuesta la componente Y del vector de posición valdrá 10 m



:

Por tanto: 0,8 t = 10; t =12,5 s.

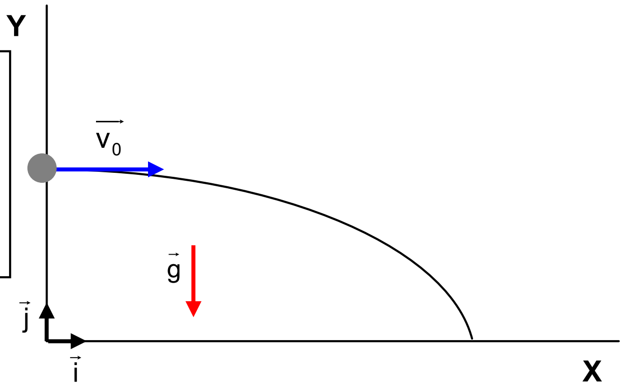
Se encontrará a una distancia del punto de partida de: x = 2,0 t = 2,0 x 12,5 =25,0 m.

Distancia recorrida: $r = \sqrt{\left(25{,}0^2 + 10{,}0^2\right)m^2} = 26{,}9\ m$

Tiro horizontal

Tiene lugar cuando un objeto (sometido a la acción de la gravedad) es lanzado con determinada velocidad v_0 en dirección paralela al suelo.

El movimiento es uniformemente acelerado (MUA), ya que la aceleración es constante.



Ecuaciones (generales) del MUA:

$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g}\,t} \qquad \boxed{\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{g}\,t^2}$$

Constantes del movimiento (origen: el de coordenadas): $\vec{r}_0 = h\vec{j}\,,\ \vec{v}_0 = v_0\vec{i}\,,\ \vec{g} = -g\vec{j}$

Ejemplo 1.

Desde una ventana situada a 20 m sobre el suelo se lanza horizontalmente un objeto con una velocidad de 15 m/s. Determinar:

a) Las ecuaciones que describen el movimiento del objeto.
b) El punto en que toca el suelo.
c) La velocidad con que llega al suelo.

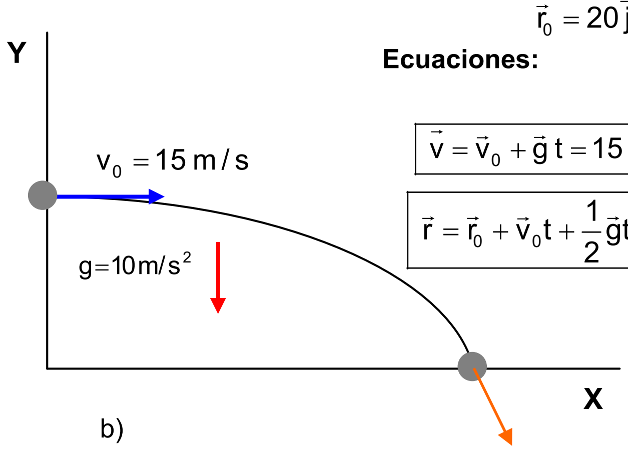
Solución:

a)

Tomado como origen el de los ejes coordenados y considerando positivo hacia la derecha y hacia arriba:

$$\vec{r}_0 = 20\vec{j}\,,\ \vec{v}_0 = 15\vec{i}\,,\ \vec{g} = -10\vec{j}$$

Ecuaciones:



$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g}\,t = 15\,\vec{i} - (10t)\,\vec{j}}$$

$$\boxed{\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2 = 20\vec{j} + (15\,t)\,\vec{i} - \frac{1}{2}(10t^2)\,\vec{j} = (15t)\,\vec{i} + (20 - 5t^2\ )\,\vec{j}}$$

b)

Cuando toca el suelo y = 0.

Luego : 0 = 20- 5 t^2.

$$t = \sqrt{\frac{20}{5}} = 2\ s$$

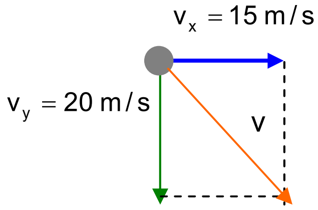
Tiempo que el objeto tarda en llegar al suelo solamente se considera el resultado con signo positivo).

Para calcular la distancia a la que toca el suelo se calcula el valor de la componente x para t = 2 s.

$$x_{\,(t\,=\,2)} = 15.\ 2 = 30\ m.$$

c)

Cuando toca el suelo el vector velocidad valdrá:

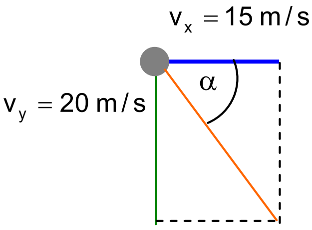


$$\vec{v} = 15\ \vec{i} - (10t)\ \vec{j}\ ;\ \vec{v}_{(t=2,0)} = 15\ \vec{i} - 20\ \vec{j}$$

Módulo:

$$v = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2} = \sqrt{15^2 + 20^2} = 25\ \frac{m}{s}$$

También se puede calcular el ángulo que el vector velocidad forma con la horizontal en el momento de llegar al suelo:



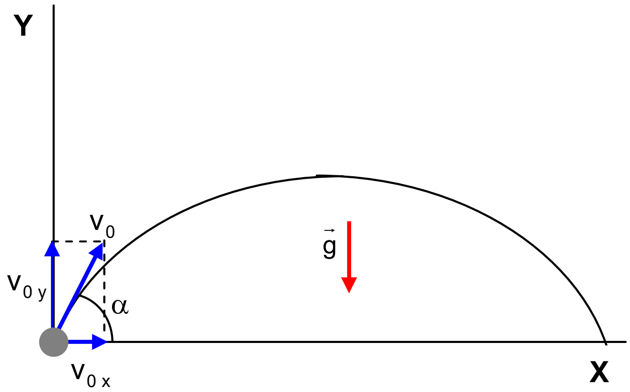
$$\mathrm{tg}\ \alpha = \frac{20}{15} = 1{,}333\ ;\ \alpha = 53{,}1^0$$

Para calcular el ángulo correspondiente a la tangente usar la función inv tan ó $\tan^{-1}$ de la calculadora.

Tiro oblicuo

Tiene lugar cuando un objeto (sometido a la acción de la gravedad) es lanzado con una velocidad v_0 que forma un ángulo α con la horizontal.

El movimiento es uniformemente acelerado (MUA), ya que la aceleración es constante.



La diferencia que existe con respecto al tiro horizontal es que ahora la velocidad inicial tiene componente tanto en el eje X (v_{0x}) como en el eje Y (v_{0y}).

Realmente el tiro horizontal se puede considerar un caso particular del oblicuo haciendo $\alpha = 0^0$

Ecuaciones (generales) del MUA:

$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g}\ t} \qquad \boxed{\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{g}\ t^2}$$

Constantes del movimiento (origen: el de coordenadas): $\vec{r}_0 = 0\ ,\ \vec{v}_0 = v_{0x}\,\vec{i} + v_{0y}\,\vec{j}\ ,\ \vec{g} = -g\,\vec{j}$

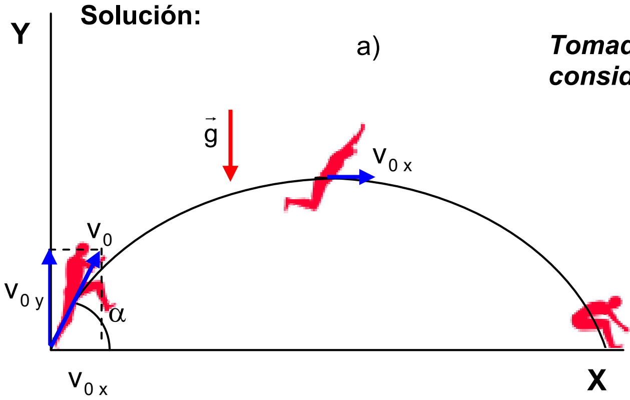
Ejemplo 2.

Un saltador de longitud llega a la tabla de batida con una velocidad de 8,5 m/s e inicia el vuelo con un ángulo de 40 ^{0}. Determinar:

a) Las ecuaciones del movimiento.
b) El alcance del salto.
c) La altura máxima alcanzada.
d) Altura y velocidad a los 0,75 s.

Solución:

a)



Tomado como origen el de los ejes coordenadas, y considerando positivo hacia la derecha y hacia arriba:

$$\vec{r}_0 = 0\,,\ \vec{v}_0 = v_{0x}\,\vec{i} + v_{0y}\,\vec{j}\,,\ \vec{g} = -g\,\vec{j}$$

v_{0x} = 8,5. cos 40= 6,5 m/s
v_{0y} = 8,5. sen 40= 5,5 m/s
g = 10 m/s^2

$$\vec{r}_0 = 0\,,\ \vec{v}_0 = 6{,}5\,\vec{i} + 5{,}5\,\vec{j}\,,\ \vec{g} = -10\,\vec{j}$$

Ecuaciones:

$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g}\,t = 6{,}5\,\vec{i} + 5{,}5\,\vec{j} - (10t)\,\vec{j} = 6{,}5\,\vec{i} + (5{,}5 - 10t)\,\vec{j}}$$

$$\boxed{\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2 = (6{,}5\,t)\,\vec{i} + (5{,}5\,t)\,\vec{j} - \frac{1}{2}(10t^2)\,\vec{j} = (6{,}5t)\,\vec{i} + (5{,}5\,t - 5t^2)\,\vec{j}}$$

b)

Para calcular el alcance imponemos la condición de que el saltador llegue en el suelo. Es decir y =0:

$$0 = 5{,}5\,t - 5\,t^2;\quad t = \frac{5{,}5}{5} = 1{,}10\,s$$ Tiempo que el saltador está en el aire.

Para calcular la distancia se calcula el valor de la componente x para t = 1,10 s

$x_{(t=1,10)}$ = 6,5 . 1,10 = 7,15 m

c) y d)

En el punto de altura máxima ocurre que la componente y de la velocidad (v_y) es nula (ver esquema). Por tanto:

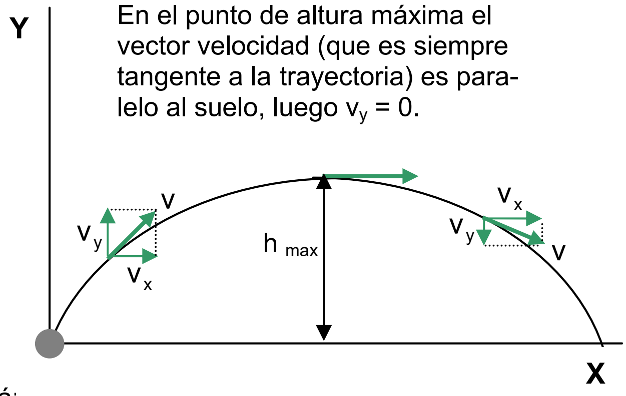
v_y = 0.

0 = 5,5 – 10 t;

t = 0,55 s.

El tiempo obtenido es el que tarda en alcanzar la altura máxima (en este caso es justamente la mitad del tiempo de vuelo, pero no siempre ocurre esto. Ver ejemplo 3).

En el punto de altura máxima el vector velocidad (que es siempre tangente a la trayectoria) es paralelo al suelo, luego v_y = 0.



El vector de posición para la altura máxima será:

$$\vec{r}_{máx} = (6{,}5.0{,}55)\,\vec{i} + (5{,}5.0{,}55 - 5(0{,}55)^2)\,\vec{j} = 3{,}58\,\vec{i} + 1{,}51\,\vec{j}$$

Luego la altura máxima $y_{máx}$ = 1,51 m se alcanza justamente a la mitad de la trayectoria x = 3,58 m.

A los 0,75 s de iniciado el salto: $\vec{v}_{(t=0,75)} = 6{,}5\,\vec{i} + (5{,}5 - 10.0{,}75)\,\vec{j} = 6{,}5\,\vec{i} - 2{,}0\,\vec{j}$

$$v = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2} = \sqrt{6{,}5^2 + 2{,}0^2} = 6{,}8\,\frac{m}{s}$$

$$\vec{r}_{(t=0,75)} = (6{,}5.0{,}75)\,\vec{i} + (5{,}5\,.0{,}75 - 5.0{,}75^2)\,\vec{j} = 4{,}88\,\vec{i} + 1{,}31\,\vec{j}$$

Como se puede comprobar por el signo de v_y, el saltador se encuentra en la parte descendente de la parábola.

Ejemplo 3

Desde una ventana de un edificio situada a 12 m del suelo se lanza una pelota con una velocidad de 15 m/s formando un ángulo de 30^0 con la horizontal. Determinar:

a) Las ecuaciones que describen el movimiento de la pelota:

- ✓ Si se toma como origen el de coordenadas.
- ✓ Si se toma como origen el lugar de lanzamiento.

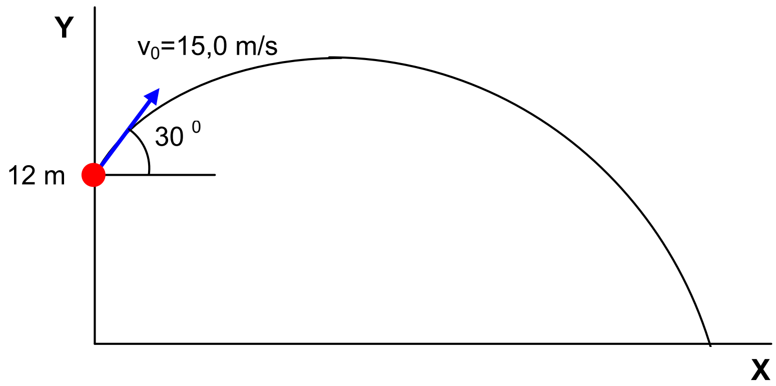
b) ¿Cuánto tiempo tardará en chocar con el suelo?

c) ¿Cuánto tiempo tardará en pasar por delante de un balcón situado 2 m por encima del lugar de lanzamiento?

d) ¿Cuál es la altura máxima alcanzada?

Solución

a)



h = 12,0 m

v_{0x} =15,0. cos 30= 13,0 m/s

v_{0y} =15,0 sen 30= 7,5 m/s

g = 10 m/s^2

Tomado como origen el de los ejes coordenados, y considerando positivo hacia la derecha y hacia arriba:

$$\vec{r}_0 = h\vec{j}\ ,\ \vec{v}_0 = v_{0x}\,\vec{i} + v_{0y}\,\vec{j}\ ,\ \vec{g} = -g\vec{j}$$

$$\vec{r}_0 = 12{,}0\,\vec{j}\ ,\ \vec{v}_0 = 13{,}0\,\vec{i} + 7{,}5\,\vec{j}\ ,\ \vec{g} = -10\,\vec{j}$$

Ecuaciones:

$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g}\,t = 13{,}0\,\vec{i} + 7{,}5\,\vec{j} - (10t)\,\vec{j} = 13{,}0\,\vec{i} + (7{,}5 - 10t)\,\vec{j}}$$

$$\boxed{\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2 = 12{,}0\,\vec{j} + (13{,}0\,t)\,\vec{i} + (7{,}5\,t)\,\vec{j} - \frac{1}{2}(10t^2)\,\vec{j} = (13{,}0t)\,\vec{i} + (12{,}0 + 7{,}5\,t - 5t^2)\,\vec{j}}$$

Tomado como origen el punto de lanzamiento, y considerando positivo hacia la derecha y hacia arriba:

$$\vec{r}_0 = 0\ ,\ \vec{v}_0 = v_{0x}\,\vec{i} + v_{0y}\,\vec{j}\ ,\ \vec{g} = -g\vec{j}$$

$$\vec{r}_0 = 0\ ,\ \vec{v}_0 = 13{,}0\,\vec{i} + 7{,}5\,\vec{j}\ ,\ \vec{g} = -10\,\vec{j}$$

Ecuaciones:

$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g}\,t = 13{,}0\,\vec{i} + 7{,}5\,\vec{j} - (10t)\,\vec{j} = 13{,}0\,\vec{i} + (7{,}5 - 10t)\,\vec{j}}$$

$$\boxed{\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2 = (13{,}0\,t)\,\vec{i} + (7{,}5\,t)\,\vec{j} - \frac{1}{2}(10t^2)\,\vec{j} = (13{,}0t)\,\vec{i} + (17{,}5\,t - 5t^2)\,\vec{j}}$$

b)

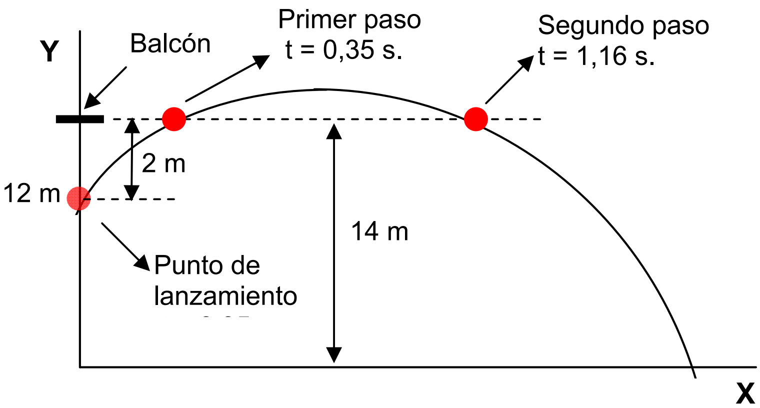
Si consideramos el **origen situado en el suelo**, cuando la pelota choque con él, y = 0

$0 = 12{,}0 + 7{,}5\ t - 5\ t^2$; resolviendo la ecuación de segundo grado y seleccionando el resultado positivo que es el que tiene significado físico (¿qué significado tiene el resultado negativo?) se tiene como tiempo que la pelota tarda en caer: t = 2,47 s.

Si consideramos el **origen situado en el punto de lanzamiento**, cuando la pelota llegue al suelo se cumple que y = -12 m. Luego:

$-12 = 7{,}5\ t - 5t^2$; $0 = 12 + 7{,}5\ t - 5t^2$ que es una ecuación idéntica a la anterior y que, en consecuencia, tiene la misma solución.

c)



Considerando el origen situado en el suelo, cuando pase por el balcón y =14 m.

Luego:

$14 = 12 + 7{,}5\ t - 5\ t^2$; $5t^2 - 7{,}5\ t + 2 = 0$.

Resolviendo: se obtienen dos resultados positivos $t_1 = 0{,}35$ s ; $t_2 = 1{,}16$ s.

Ambos resultados pueden considerarse válidos. El primero es el tiempo que tarda en pasar por el balcón cuando aún está ascendiendo y el segundo cuando está en la zona de descenso.

Si **consideramos el origen situado en el punto de lanzamiento**, cuando pase por el balcón y = 2 m. Luego:

$$2 = 7{,}5\ t - 5\ t^2 \ ;\ 5\ t^2 - 7{,}5\ t + 2 = 0$$, que es la misma ecuación.

d)

Para calcular la altura máxima alcanzada imponemos la condición (ver ejemplo 2) $v_y = 0$:

$0 = 7{,}5 - 10\ t$; t = 0,75 s. Tiempo que tarda en alcanzar la altura máxima. Observar que en este caso al no estar el punto de lanzamiento sobre el eje X, el tiempo que tarda en alcanzar la altura máxima no es la mitad del tiempo de vuelo.

Para calcular la altura máxima calculamos el valor de y:

Origen suelo:

$y_{(t = 0{,}75)} = 12 + 7{,}5 \cdot 0{,}75 - 5 \cdot 0{,}75^2 = 14{,}81$ m.

Origen punto de lanzamiento:

$y_{(t = 0{,}75)} = 7{,}5 \cdot 0{,}75 - 5 \cdot 0{,}75^2 = 2{,}81$ m.

Observar que sale signo positivo. Lo que indica que la altura máxima se encuentra 2,81 m por encima del punto de lanzamiento. Esto es a 2,81 + 12 = 14,81 m del suelo.