

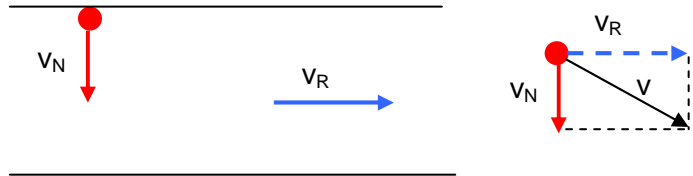
COMPOSICIÓN DE MOVIMIENTOS

IES La Magdalena.
Avilés. Asturias

Puede ocurrir que un cuerpo esté sometido, simultáneamente, a dos movimientos. Un ejemplo típico de esto es el nadador que trata de alcanzar la orilla opuesta de un río nadando en dirección perpendicular a la corriente (ver esquema).

La velocidad resultante (suma de vectores) será \vec{v}

v_N = velocidad del nadador
 v_R = velocidad de la corriente



Si recordamos el significado físico de la suma de vectores podemos estudiar el movimiento del cuerpo:

- Considerado que se mueve con la velocidad resultante, v .
- Considerando que se mueve sometido, simultáneamente, a un movimiento según el eje X con velocidad v_R y otro, según el eje Y con velocidad v_N .

Las ecuaciones para este movimiento serían (considerando el origen situado en el punto de partida del nadador y **sentido positivo hacia la derecha y hacia abajo**)

Eje X:
 $v_x = v_R$
 $x = v_R t$

Eje Y:
 $v_y = v_N$
 $y = v_N t$

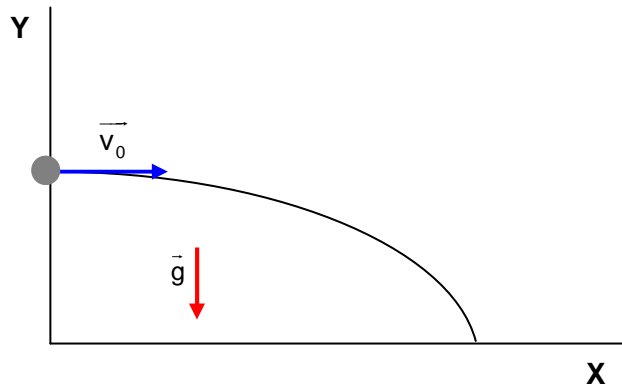
Esta manera de proceder se puede aplicar a muchos movimientos que se observan en la naturaleza.

Tiro horizontal

Tiene lugar cuando un objeto (sometido a la acción de la gravedad) es lanzado con determinada velocidad v_0 en dirección paralela al suelo.

El movimiento es el resultante de la composición de dos movimientos:

- Uno uniforme según el eje X.
- Uno uniformemente acelerado según el eje Y.



Ecuaciones

Eje X:

$$v_x = v_0 = \text{cte.}$$

$$x = x_0 + v_x t$$

Eje Y

$$v_y = gt$$

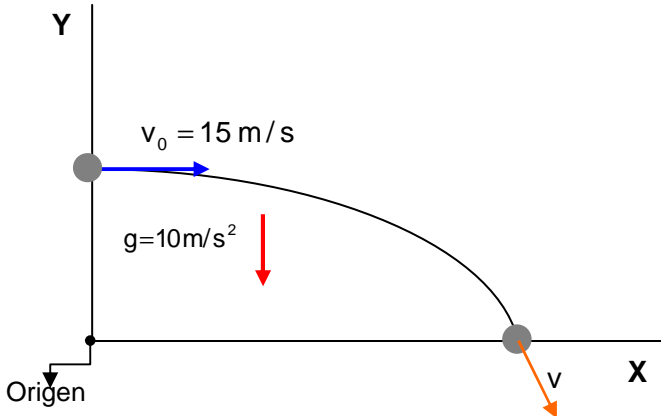
$$y = y_0 + 1/2 g t^2$$

Ejemplo 1.

Desde la ventana situada a 20 m sobre el suelo se lanza horizontalmente un objeto con una velocidad de 15 m/s. Determinar:

- a) Las ecuaciones que describen el movimiento del objeto.
- b) El punto en que toca el suelo.
- c) La velocidad con que llega al suelo.

Solución:



Tomado como origen el de los ejes coordenados y considerando positivo hacia la derecha y hacia arriba:

$$\begin{aligned} x_0 &= 0 \\ v_0 &= 15 \text{ m/s} \\ y_0 &= 20 \text{ m} \\ g &= -10 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

| Ecuaciones | |
|------------------|------------------|
| Eje X: | Eje Y: |
| $v_x = v_0 = 15$ | $v_y = -10 t$ |
| $x = 15 t$ | $y = 20 - 5 t^2$ |

Cuando toca el suelo $y = 0$.

Luego : $0 = 20 - 5 t^2$.

$$t = \sqrt{\frac{20}{5}} = 2 \text{ s} \quad \text{Tiempo que el objeto tarda en llegar al suelo(solamente se considera el resultado con signo positivo).}$$

Para calcular la distancia a la que toca el suelo se calcula el valor de la componente x para $t = 2 \text{ s}$.

$$x_{(t=2)} = 15 \cdot 2 = 30 \text{ m.}$$

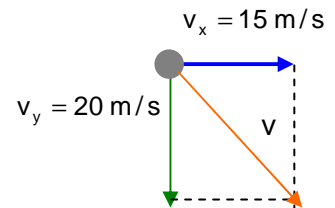
Cuando toca el suelo el vector velocidad tendrá como componentes:

$$v_x = v_0 = 15 \text{ m/s}$$

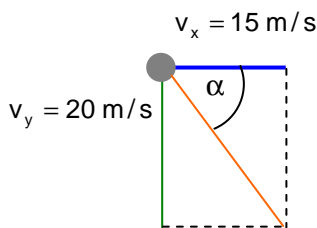
$$v_y = -10 \cdot 2 = -20 \text{ m/s. El signo menos indica que apunta hacia abajo.}$$

Por tanto:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{15^2 + 20^2} = 25 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$



También se puede calcular el ángulo que el vector velocidad forma con la horizontal en el momento de llegar al suelo:



$$\text{tg } \alpha = \frac{20}{15} = 1,333; \alpha = 53,1^\circ$$

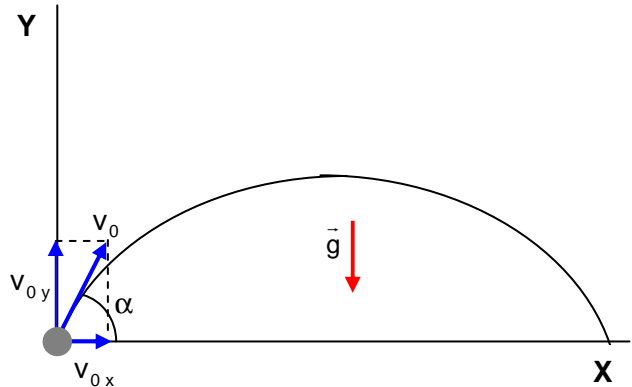
Para calcular el ángulo correspondiente a la tangente usar la función inv tan^{-1} de la calculadora.

Tiro oblicuo

Tiene lugar cuando un objeto (sometido a la acción de la gravedad) es lanzado con una velocidad v_0 que forma un ángulo α con la horizontal.

El movimiento es el resultante de la composición de dos movimientos:

- Uno uniforme según el eje X.
- Uno uniformemente acelerado según el eje Y.



La diferencia que existe con respecto al tiro horizontal es que ahora la velocidad inicial tiene componente tanto en el eje X (v_{0x}) como en el eje Y (v_{0y}).

Realmente el tiro horizontal se puede considerar un caso particular del oblicuo haciendo $\alpha = 0^\circ$

Ecuaciones

Eje X:

$$v_x = v_{0x} = v_0 \cos \alpha$$

$$x = x_0 + v_x t = x_0 + (v_0 \cos \alpha) t$$

Eje Y

$$v_y = v_{0y} + gt = v_0 \sin \alpha + g t$$

$$y = y_0 + v_{0y} t + 1/2 g t^2 = y_0 + (v_0 \sin \alpha) t + 1/2 g t^2$$

Ejemplo 2.

Un saltador de longitud llega a la tabla de batida con una velocidad de 8,5 m/s e inicia el vuelo con un ángulo de 40° . Determinar:

- Las ecuaciones del movimiento.
- El alcance del salto.
- La altura máxima alcanzada.
- Altura y velocidad a los 0,75 s.

Tomado como origen el de los ejes coordenados y considerando positivo hacia la derecha y hacia arriba:

$$x_0 = 0$$

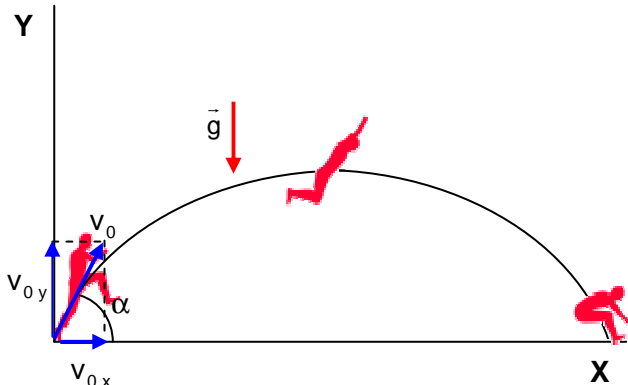
$$y_0 = 0$$

$$v_{0x} = 8,5 \cdot \cos 40 = 6,5 \text{ m/s}$$

$$v_{0y} = 8,5 \cdot \sin 40 = 5,5 \text{ m/s}$$

$$g = -10 \text{ m/s}^2$$

Solución:



Ecuaciones

Eje X:

$$v_x = v_{0x} = 6,5$$

$$x = 6,5 t$$

Eje Y:

$$v_y = 5,5 - 10 t$$

$$y = 5,5 t - 5 t^2$$

Para calcular el alcance del salto, imponemos la condición de que el saltador llegue en el suelo. Es decir $y=0$:

$$0 = 5,5 t - 5 t^2; \quad t = \frac{5,5}{5} = 1,10 \text{ s} \quad \text{. Tiempo que el saltador está en el aire.}$$

Para calcular la distancia se calcula el valor de la componente x para $t = 1,05$ s

$$x_{(t=1,1)} = 6,5 \cdot 1,10 = 7,15 \text{ m}$$

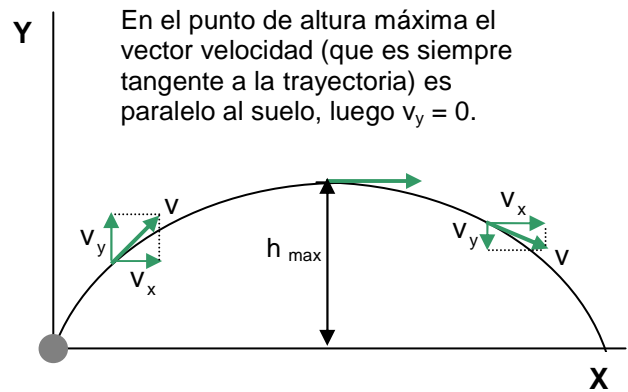
En el punto de altura máxima ocurre que la componente y de la velocidad (v_y) es nula (ver esquema). Por tanto:

$$v_y = 0.$$

$$0 = 5,5 - 10 t;$$

$$t = 0,55 \text{ s.}$$

El tiempo obtenido es el que tarda en alcanzar la altura máxima (notar que en este caso es justamente la mitad del tiempo de vuelo, pero no siempre ocurre esto. Ver apartado d del ejemplo 3)



Para calcular el valor de la altura máxima, calculamos el valor de la componente y para $t = 0,55$ s:

$$y_{(t=0,55)} = 5,5 \cdot 0,55 - 5 \cdot 0,55^2 = 1,51 \text{ m.}$$

A los 0,75 s de iniciado el salto:

El atleta se encontrará a una distancia del origen de:

$$x_{(t=0,75)} = 6,5 \cdot 0,75 = 4,88 \text{ m.}$$

A una altura de:

$$y_{(t=0,75)} = 5,5 \cdot 0,75 - 5 \cdot 0,75^2 = 1,31 \text{ m.}$$

Las componentes de la velocidad valdrán:

$$v_x = 6,5 \text{ m/s.}$$

$$v_y = 5,5 - 10 \cdot 0,75 = -2,0 \text{ m/s.}$$

Como se puede comprobar por el signo de v_y el saltador se encuentra en la parte descendente de la parábola. Su velocidad será:

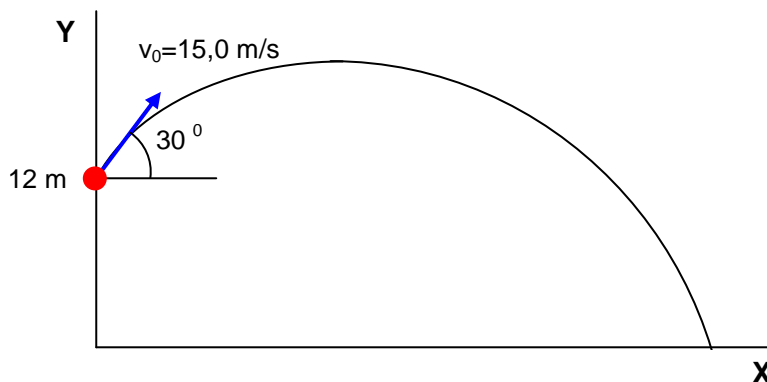
$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{6,5^2 + 2,0^2} = 6,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Ejemplo 3

Desde una ventana de un edificio situada a 12 m del suelo se lanza una pelota con una velocidad de 15 m/s formando un ángulo de 30° con la horizontal. Determinar:

- Las ecuaciones que describen el movimiento de la pelota:
 - ✓ Si se toma como origen el de coordenadas.
 - ✓ Si se toma como origen el lugar de lanzamiento.
- ¿Cuánto tiempo tardará en chocar con el suelo?
- ¿Cuánto tiempo tardará en pasar por delante de un balcón situado 2 m por encima del lugar de lanzamiento?
- ¿Cuál es la altura máxima alcanzada?

Solución



Tomado como origen el de los ejes coordenados y considerando positivo hacia la derecha y hacia arriba:

$$\begin{aligned} x_0 &= 0 \\ y_0 &= 12 \\ v_{0x} &= 15,0 \cdot \cos 30 = 13,0 \text{ m/s} \\ v_{0y} &= 15,0 \cdot \sin 30 = 7,5 \text{ m/s} \\ g &= -10 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$



| Ecuaciones | |
|-----------------------|--------------------------|
| Eje X: | Eje Y: |
| $v_x = v_{0x} = 13,0$ | $v_y = 7,5 - 10 t$ |
| $x = 13,0 t$ | $y = 12 + 7,5 t - 5 t^2$ |

Tomado como origen el punto de lanzamiento y considerando positivo hacia la derecha y hacia abajo:

$$\begin{aligned} x_0 &= 0 \\ y_0 &= 0 \\ v_{0x} &= 15,0 \cdot \cos 30 = 13,0 \text{ m/s} \\ v_{0y} &= -15,0 \cdot \sin 30 = -7,5 \text{ m/s} \\ g &= 10 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$



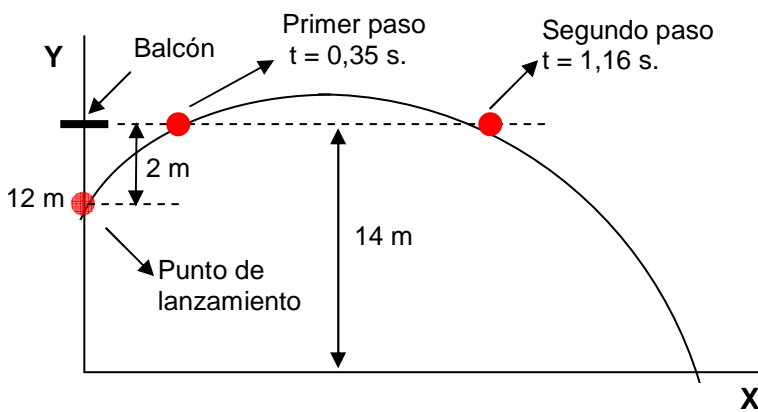
| Ecuaciones | |
|-----------------------|----------------------|
| Eje X: | Eje Y: |
| $v_x = v_{0x} = 13,0$ | $v_y = -7,5 + 10 t$ |
| $x = 13,0 t$ | $y = -7,5 t + 5 t^2$ |

Si consideramos el **origen situado en el suelo**, cuando la pelota choque con él, $y = 0$

$0 = 12 + 7,5 t - 5 t^2$; resolviendo la ecuación de segundo grado y seleccionando el resultado positivo que es el que tiene significado físico (¿qué significado tiene el resultado negativo?) se tiene como tiempo que la pelota tarda en caer: $t = 2,47 \text{ s}$.

Si consideramos el **origen situado en el punto de lanzamiento**, cuando la pelota llegue al suelo se cumple que $y = 12 \text{ m}$. Luego:

$12 = -7,5 t + 5 t^2$; $0 = 12 + 7,5 t - 5 t^2$ que es una ecuación idéntica a la anterior y que, en consecuencia, tiene la misma solución.



Considerando el origen situado en el suelo, cuando pase por el balcón $y = 14$ m.

Luego:

$$14 = 12 + 7,5 t - 5 t^2 ; 5t^2 - 7,5 t + 2 = 0.$$

Resolviendo: se obtienen dos resultados positivos $t_1 = 0,35$ s ; $t_2 = 1,16$ s.

Ambos resultados pueden considerarse válidos. El primero es el tiempo que tarda en pasar por el balcón cuando aún está ascendiendo y el segundo cuando está en la zona de descenso.

Si consideramos el origen situado en el punto de lanzamiento, cuando pase por el balcón $y = - 2$ m (recordar que se había considerado positivo hacia abajo). Luego:

$$- 2 = -7,5 t + 5 t^2 ; 5 t^2 - 7,5 t + 2 = 0 , \text{ que es la misma ecuación.}$$

Para calcular la altura máxima alcanzada imponemos la condición (ver ejemplo 2) $v_y = 0$:

$0 = 7,5 - 10 t ; t = 0,75$ s. Tiempo que tarda en alcanzar la altura máxima. Observar que en este caso al no estar el punto de lanzamiento sobre el eje X, el tiempo que tarda en alcanzar la altura máxima no es la mitad del tiempo de vuelo.

Para calcular la altura máxima calculamos el valor de y :

Origen suelo:

$$y_{(t=0,75)} = 12 + 7,5 \cdot 0,75 - 5 \cdot 0,75^2 = 14,81 \text{ m.}$$

Origen punto de lanzamiento:

$$y_{(t=0,75)} = - 7,5 \cdot 0,75 + 5 \cdot 0,75^2 = - 2,81 \text{ m.}$$

Observar que sale signo negativo. Lo que indica que la altura máxima se encuentra 2,81 m por encima del punto de lanzamiento. Esto es a $2,81 + 12 = 14,81$ m del suelo.